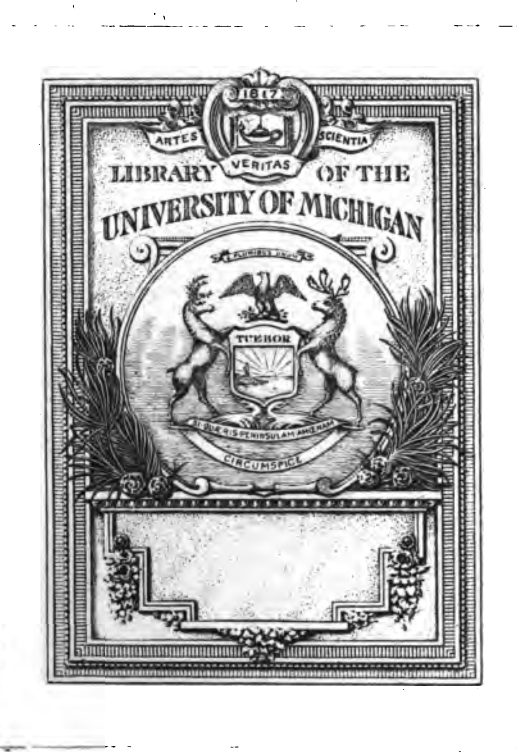
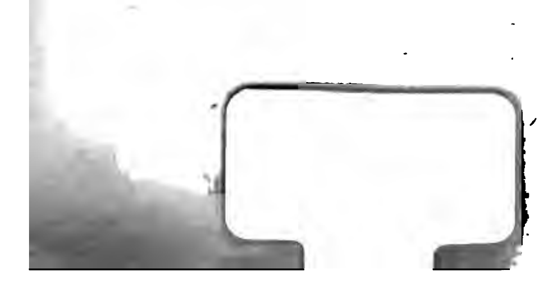
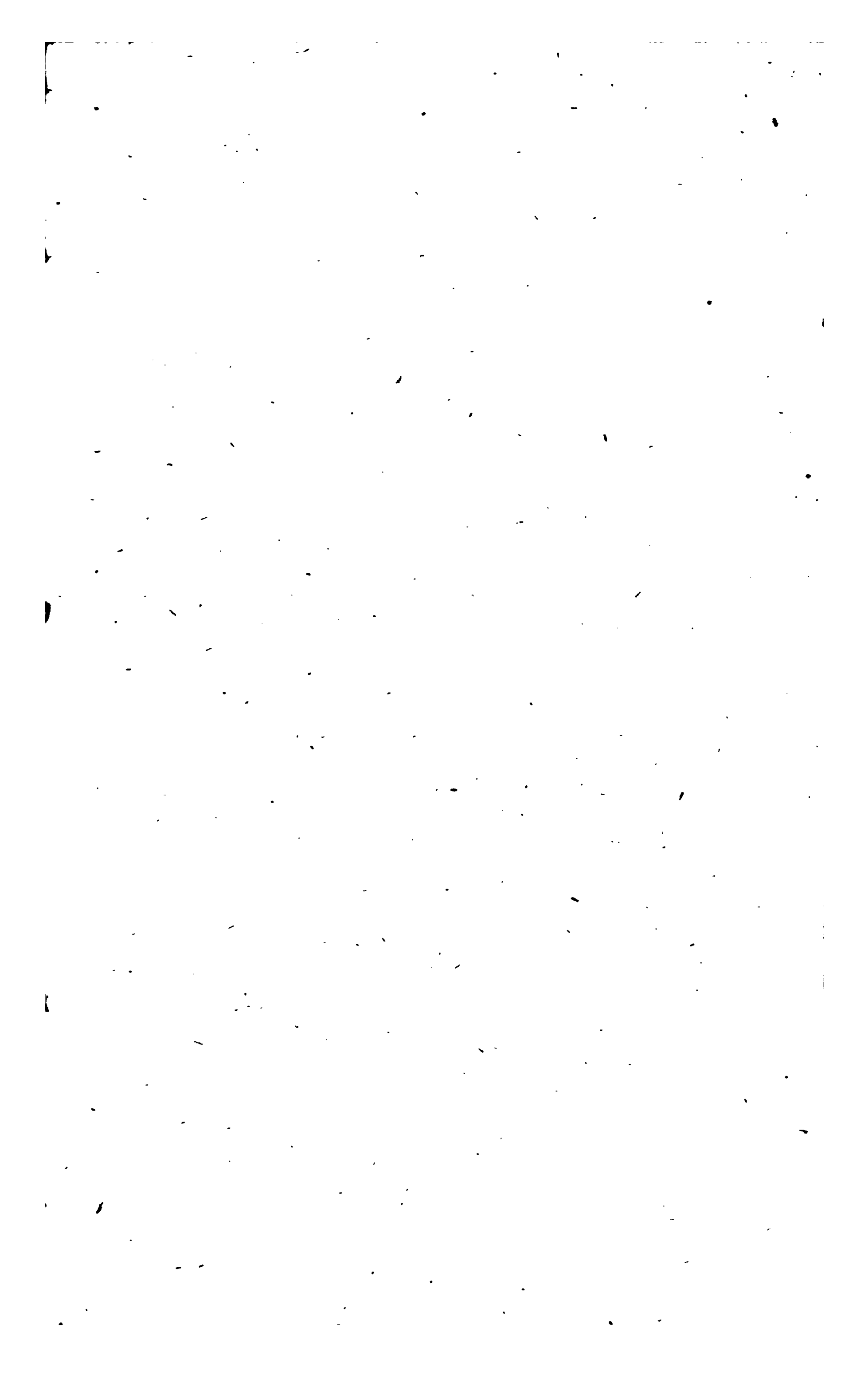

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE







Die Lehre vom Grössten und Kleinsten.

Mit einer Einleitung und einem Anhange, von denen die erstere Hilfssätze aus der Differential- und Integral-Rechnung, der letztere dagegen eine etwas allgemeinere Variations-Rechnung enthält.

Zu seinen Vorlesungen und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet

von

Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Universität zu Berlin außerordentl. Professor, Lehrer an der Königl. Bau-Akademie daselbst, und mehrer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Une des raisons principales, qui éloignent ceux, qui entrent dans les connaissances, du véritable chemin qu'ils doivent suivre, est l'imagination qu'on prend d'abord, que les bonnes choses sont inaccessibles, en leur donnant le nom de grandes, hautes, elévées, sublimes. Cela perd tout. Je les voudrais nommer basses, communes, familières.

Pascal.

Berlin 1825.

Bei T. H. Riemann.

Vorrede.

Die Lehre vom Größten und Kleinsten beschäftigt sich damit, diejenigen Werthe der absolut veränderlichen Größen, x, y, z, etc., von denen ein Ausdruck V abhängt, zu finden, für welche dieses V größer oder kleiner wird, als diejenigen Nachbarwerthe von V, die zu den nächst größern und nächst kleinern Werthen eines, zweier, etc. oder aller absolut Veränderlichen x, y, z etc. etc. in beliebiger Verbindung genommen gehören, es mag dieses V eine Urfunktion seyn von x, y, z etc., oder eine Differential- oder eine Integral-Funktion *) derselben absolut Veränderlichen. — Die dem x, y, z, etc. nächst

*) Ist V eine Integral-Funktion, so bilden die dahin gehörigen Aufgaben das früher so genannte isoperimetrische Problem in seinem weitesten Umfange genommen.

größern und nächst kleinern Werthe von x, y, z, etc. lassen sich durch $x+h$, $y+k$, $z+l$, etc. darstellen, wenn h, k, l, etc. von einander unabhängig bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens gedacht werden; nur bequemer ist es, dieselben nächst größern und nächst kleinern Werthe von x, y, z, etc. durch $x+\varkappa m$, $y+\varkappa n$, $z+\varkappa p$, etc. darzustellen, wo $\varkappa$ allein bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens gedacht wird, während m, n, p etc. ganz beliebige von einander unabhängige, jeden möglichen Werth annehmende Ausdrücke bedeuten. So wie aber $x+\varkappa m$, $y+\varkappa n$, $z+\varkappa p$, etc. statt x, y, z, etc. gesetzt wird, so gehen alle von x, y, z, etc. abhängige Ausdrücke u, w, etc. und namentlich auch V selbst (es mag solches eine Ur-, Differential- oder Integral-Funktion seyn) nothwendig nach steigenden Potenzen von $\varkappa$ fort (d. h. was aus ihnen und also namentlich aus V dann wird, muß sich in eine solche nach steigenden Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihe verwandeln lassen), so daß das erste Glied derselben jedesmal beziehlich u, w, etc. oder V selbst ist; — und zwar deshalb, weil sie für $\varkappa=0$, auf sich selber sich wiederum zurückziehen müssen. — Ist also $V=f(x, y, z, \text{etc.})$ (eine Ur-, Differential- oder Integral-Funktion), so lassen sich alle Nachbarwerthe von V, in Bezug auf welche V selbst ein Maximum oder Minimum seyn soll, durch

$$f(x+\varkappa m,\ y+\varkappa n,\ z+\varkappa p,\ \text{etc. etc.})$$

vorstellen, und dieser Ausdruck läßt sich dann in eine nach x fortgehende Reihe entwickeln, im Allgemeinen von der Form

$$V + x.M_1 + x^2.M_2 + x^3.M_3 + x^4.M_4 + \text{etc.},$$

der man leicht auch die Form

$$(\text{♂}) \ldots V + \frac{x}{1}.N_1 + \frac{x^2}{1.2}.N_2 + \frac{x^3}{1.2.3}.N_3 + \text{etc. etc. etc.}$$

geben wird; während derselbe Ausdruck jedoch auch in besonderen Fällen, für bestimmte Werthe von x, y, z, etc. ausnahmsweise nach gebrochenen (aber immer steigenden und positiven) Potenzen von x fortgehen kann, und dann die Form haben wird

$$(\text{♁}) \ldots\ldots \quad V + x^{\mu}.P + x^{\nu}.Q + \text{etc. etc. etc.},$$

wo μ, ν, etc. ganze oder gebrochene positive Zahlen seyn werden.

So oft aber eine Funktion

$$f(x + xm,\ y + xn,\ z + xp,\ \text{etc.}),$$

so lange x, y, z, etc. allgemein sind, die Form (♂) annimmt, — für besondere Ausnahms-Werthe von x, y, z, etc. aber die andere Form (♁), so wird der allgemeine Coefficient N_1 in (♂) für diese besonderen Werthe von x, y, z, etc. [zu Folge eines bekannten Satzes der Differentialrechnung *)], $= 0$ werden, wenn $\mu > 1$, dagegen die Form ∞ annehmen, wenn $\mu < 1$ ist.

*) La grange, Léçons sur le Calcul d. f. 1806. Léç. VIII.

Da ferner x im Moment des Verschwindens gedacht werden muß und bald positiv, bald aber negativ, so hängt das Zeichen des Zuwachses von V in (♂), von dem des ersten Gliedes $x.N_1$ ab, wenn letzteres d. h. N_1 nicht Null ist, und dieser Zuwachs ändert daher das Zeichen mit x zugleich, welches im Falle V beständig größer oder beständig kleiner als alle diese Nachbarwerthe (♂) seyn soll, nicht geschehen darf (weil dann dieser Zuwachs beständig negativ, oder beständig positiv seyn muß, man mag x positiv oder negativ nehmen, wenn nur jedesmal im Moment des Verschwindens). Also muß im Falle des fraglichen Maximums oder Minimums $N_1 = 0$ seyn, und dann wird V in Bezug auf diese Nachbarwerthe (♂) ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn, wenn N_2 $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist, weil dann, wenn $N_1 = 0$ ist, das Zeichen des Zuwachses von dem des jetzigen ersten Gliedes $\frac{x^2}{1.2}.N_2$ abhängt, also von dem des Coefficienten N_2, weil x^2 immer positiv ist.

In den Ausnahmsfällen dagegen, wo die Nachbarwerthe von V nach gebrochenen Potenzen von x fortgehen und in (♁) ausgedrückt sind, hängt das Maximum oder Minimum davon ab, ob $x^\mu.P$ beständig positiv oder beständig negativ seyn wird, man mag x bald positiv, bald negativ nehmen; und dies ist dann der Fall, wann μ eine ganze gerade Zahl oder eine in den kleinsten Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl ist, mit geradem Zähler. — In

diesen Ausnahmsfällen ist aber, wie wir weiter oben gesehen haben, N_1 allemal $=0$ oder $=\infty$, weil im Falle des Maximums oder Minimums, μ nicht ungerade also auch nicht $=1$ seyn kann.

In dem allgemeinen, oder in dem Ausnahmsfalle, muß daher doch immer der Coefficient N_1 in (♂), $=0$ oder $=\infty$ seyn, für diejenigen Werthe von x, y, z, etc., für welche V in Bezug auf die Nachbarwerthe (♂ oder ♁) ein Maximum oder Minimum seyn soll; und wenn $N_1=0$ ist und N_2 für dieselben Werthe von x, y, z, etc. $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, so ist V in der angegebenen Beziehung ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ *).

---

*) Man übersehe jedoch nicht, daß dies nur gilt, in so ferne $\varkappa$ im Moment des Verschwindens gedacht wird, weil nur dann das Zeichen des ersten Gliedes der Reihe, zu gleicher Zeit das Zeichen der ganzen Reihe bestimmt. Aber gerade dieses $\varkappa$ muß im Moment des Verschwindens gedacht werden, weil nur dann $y+\varkappa n$ z. B., nächst angrenzende Werthe von y vorstellen kann, und das Maximum oder Minimum sich nur auf diejenigen Nachbar-Werthe beziehen soll, welche zu nächst größern und nächst kleinern Werthen der absolut Veränderlichen gehören. — Eine Funktion V kann daher z. B. ein Minimum seyn, dabei aber doch größer als ein entfernterer Werth von V; oder ein Maximum und doch kleiner als ein nicht nächster Nachbar-Werth. — Es ist dieses besonders wichtig zu bemerken; denn selbst Euler (in d. n. 19. p. 41. der Methodus inven. lin. curv. max. min. etc. etc. Lausannae et Genevae 1744.) findet, daß der dortige Werth $y=x$ die gegebene Funktion als ein Maximum liefere, weil er den Werth derselben mit einem entferntern vergleicht, während die Theorie augenblicklich erkennen läßt, daß das Maximum nicht, wohl aber das Minimum statt finde.

Dem zufolge wird die Lehre vom Größten und Kleinsten aus zwei Aufgaben bestehen:

1) Wenn V oder f(x, y, z, etc.) gegeben ist, die Nachbarwerthe $f(x+\varkappa m, y+\varkappa n, z+\varkappa p$, etc.), unter der Voraussetzung, daß x, y, z, etc. noch allgemein gedacht sind, in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihe zu verwandeln, oder doch von dieser Reihe (♂) den ersten und zweiten Coefficienten N_1 und N_2 zu finden, jedesmal in x, y, z, etc. m, n, p, etc. ausgedrückt.

2) Aus der Gleichung $N_1=0$ (oder $N_1=\infty$), welche wegen der Willkührlichkeit der in N_1 eingehenden m, n, p, etc. in der Regel in mehrere einzelne von einander unabhängige Gleichungen zerfallen wird, die Werthe x, y, z, etc. wirklich zu finden, so wie für diese gefundenen Werthe von x, y, z, etc. den Werth des Coefficienten N_2 (oder wenn solcher für diese Werthe von x, y, z, etc. die Form 0 oder ∞ annehmen sollte, den des Coefficienten P und des Exponenten μ (in ♄)) zu bestimmen, und so dem vorhergehenden zufolge zu entscheiden, ob wirklich ein Maximum oder ein Minimum statt habe, und welches von beiden.

Die erste dieser beiden Aufgaben ist es nun, welche das Wesen der sogenannten Variations-Rechnung ausmacht, und sie ist offenbar die allgemeinere von beiden, da sie überhaupt die Entwicklung in Reihen zum Zwecke hat, also nicht bloß in der Lehre vom Größten

und Kleinsten, sondern überhaupt da angewandt werden kann, wo eine solche Entwicklung oder doch die Auffindung der ersten Coefficienten derselben gewünscht wird. — Es findet sich aber diese Aufgabe entweder durch den einfachen, oder durch den für eine Funktion mehrer Veränderlichen erweiterten Taylor'schen Lehrsatz unmittelbar und ohne weiteres gelößt. Noch einfacher ergiebt sich jedoch die Auflösung derselben durch den sogenannten Maclaurin'schen Lehrsatz, nach welchem jede Funktion von x z. B. $\psi(x)$ allemal

$$=(\psi)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).x+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right).\frac{x^2}{2}+\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right).\frac{x^3}{2.3}+\text{etc. etc.}$$

seyn muß, wenn die Klammern andeuten, daß nach der Differentiation Null statt x gesetzt werden soll, und wenn der Kürze wegen unter ψ die Funktion $\psi(x)$ verstanden wird. — Bezeichnet man daher obige Funktion

$f(x+xm, y+xn, z+xp, \text{etc.})$, in so ferne sie eine Funktion von x geworden ist, durch V_x, so sind obige Coefficienten N_1, N_2, etc. etc. (♂) ausgedrückt durch $\frac{\partial.V_x}{\partial x}$, $\frac{\partial^2.V_x}{\partial x^2}$, etc. etc., wenn nach beendigter Differentiation 0 statt x geschrieben wird. Denkt man sich also unter V bereits das V_x vorgestellt, so darf man solches nur hinter einander einmal, zweimal etc. etc. nach x differentiiren, und es sind diese Differentialquotienten $\frac{\partial.V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2.V}{\partial x^2}$, etc., wenn man in ihnen zuletzt noch

0 statt x schreibt, die gesuchten Coefficienten N_1, N_2, etc.; von (δ), d. h. die Coefficienten der Reihe, in welche $V_{\cdot\cdot}$ nach ganzen Potenzen von x fortgehend, entwickelt werden kann. — Wenn man endlich die obigen willkührlichen m, n, p, etc. durch δx, δy, δz, etc. bezeichnet, um dadurch sogleich den Veränderlichen anzudeuten, zu welchem sie beziehlich gehören; wenn man ferner überhaupt die Coefficienten der Entwicklungsreihen (nach ganzen Potenzen von x) der abhängigen Veränderlichen u, w, etc., endlich die von V selbst (in so ferne u, w, etc., V in Funktionen von x übergegangen sind, und durch $u_{\cdot\cdot}$, $w_{\cdot\cdot}$, etc. $V_{\cdot\cdot}$ bezeichnet werden könnten), durch δu, $\delta^2 u$, etc. etc. δw, $\delta^2 w$, etc., so wie durch δV, $\delta^2 V$, etc. etc. bezeichnet, so daß also, was oben N_1, N_2, etc. seyn sollen, jetzt durch δV, $\delta^2 V$, etc. etc. vorgestellt wird, so verschafft dies unter mehreren Vortheilen zugleich noch den, daß man sich δV, $\delta^2 V$, etc. bereits schon als die obigen Differentialien nach x denken, daher nach demselben Gesetz entwickelt hinschreiben kann, nach welchem überhaupt die Differential-Quotienten zusammengesetzter Funktionen entwickelt werden, wenn man sich nur zuletzt in jedem einzelnen Endresultat (nach beendigter Differentiation) Null statt x gesetzt denkt, d. h. wenn man nur immer δ statt ∂ (nach x genommen) setzt.

Diese eben so einfache als klare Ansicht eines oft verkannten Zweiges der Mathematik allgemeiner zu machen, ist der gegenwärtige Zweck des Verfassers; sie u.

den meisten einfachen und zusammengesetzten Fällen durchzuführen, der Gegenstand der vorliegenden Schrift. — Ihrer Natur nach zerfällt letztere also in zwei Haupt-Abtheilungen, von denen die erstere die Variations-Rechnung, die andere aber das der Lehre vom Größten und Kleinsten eigenthümliche enthalten wird.

Einfachheit, Klarheit, gedrängte Kürze und Gründlichkeit hat der Verfasser mit Vollständigkeit und Allgemeinheit, so viel es ihm möglich war, zu vereinigen gesucht. Um sich diesen Zwecken möglichst zu nähern, hat er 1) in der Einleitung alle hier gebrauchten und weniger bekannten, oder anderswo nicht bestimmt genug ausgesprochenen Sätze der Elementar-Analysis und der Differential- und Integral-Rechnung zusammen gestellt, und er findet mehre darunter, welche ihm eben so wichtig als neu erscheinen. — 2) In der Variations-Rechnung hat er sich begnügt, den ersten und höchstens noch den zweiten Coefficienten δV und $\delta^2 V$ der gegebenen Funktion V oder V_x zu entwickeln, weil nur diese beiden in der Lehre vom Größten und Kleinsten erfordert werden. Um jedoch der Variations-Rechnung auch für andere Anwendungen die gewünschte Allgemeinheit zu geben, ist der Anhang hinzugefügt worden, welcher allgemein $\delta^n V$, d. h. den Coefficienten von $\frac{x^n}{2.3.4...n}$ in V_x zu entwickeln unternimmt. — Wenn es dem Verfasser gelungen ist, in Beziehung auf diesen Anhang mehr zu leisten, als seine

Vorgänger, so verdankt er dies einzig dem eben so einfachen als fruchtbaren Aggregaten-Calcul des Professors H. A. Rothe, *) den er hier anzuwenden versucht hat; so daß ihm dieserhalb auch nicht das geringste eigene Verdienst anzurechnen seyn dürfte. — 3) Was dagegen die Lehre vom Größten und Kleinsten betrifft, in so ferne die ausführlichste und vollständigste Variations-Rechnung, die wir zur Zeit in deutscher Sprache besitzen **), nicht nur keine einzige Methode, sondern auch keine einzige Aufgabe, ja nicht einmal ein einziges Beispiel enthält, welche nicht bei Euler, ***) bei Lagrange †) oder doch bei dem berühmten Sammler Lacroix ††) gefunden werden könnten, so muß der Verfasser glauben, einiges zur Erweiterung der Wissenschaft beigetragen zu haben, namentlich auch dadurch, daß er eine ganze Klasse von Aufgaben, die Lagrange nur in einem Punkte be-

---

*) „Theorie der combinatorischen Integrale etc." Nürnberg 1820. Das wichtigste davon findet man auch zusammengedrängt in den (§. §. 371 — 375.) des zweiten Theils des „Lehrbuchs der Arithmetik, Algebra und Analysis". Berlin 1822.

**) Analyt. Darstellung d. Variations-Rechnung etc. etc. Berlin 1823.

***) Instit. Calcul. integr. T. III.
und Methodus inven. curv. max. min. Lausannae 1744.

†) Mémoires de Turin. Vol. II. et IV. und
Théorie des fonctions etc. etc., besonders aber
Léçons sur le Calcul des fonct. Paris 1806. Léç. XXII.

††) Traité d. Calc. diff. et d. calc. int. T. II. chap. X.

rührte *) und die deshalb andere Schriftsteller für unmöglich gehalten zu haben scheinen, **) mit der größten Einfachheit behandelt; während er wiederum andere zu vervollständigen gesucht hat. ***) — Endlich wird man

---

*) Théorie des fonctions etc. etc.

**) Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung. Berlin 1823. p. 95. 96.

***) Wenn man nehmlich z. B. die Aufgabe aufstellt: „die kleinste „Fläche zu finden, welche einen gegebenen Raum begrenzt", so hat Lagrange diese Aufgabe aus dem Gesichtspunkte gelößt, daß bei dem doppelten Integral von $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ zuerst nach y zwischen constanten Grenzen $y = \alpha$ und $y = \beta$, dann nach x zwischen abermals constanten Grenzen integrirt wird. Dies giebt aber bekanntlich nur das Stück der Fläche, welches zwischen zwei Paaren paralleler Ebenen liegt; und wenn nun dieses Stück der Fläche, in Bezug auf alle zwischen denselben parallelen Ebenen liegende Stücke der nächstangrenzenden Oberflächen ein Maximum oder Minimum ist, so fragt sich doch noch sehr, ob diese Eigenschaft auch der ganzen Fläche (oder jedem anders begrenzten Stücke derselben) zukommen werde. — Der Verfasser hat daher versucht, den allgemeinern und schwierigern Fall zu behandeln, wo das erste Integral nach y zwischen Grenzen genommen wird, die nicht constant sondern selbst noch Funktionen desselben x sind, nach welchem nachgehends die 2te Integration genommen werden soll. —

Zu der ersterwähnten Klasse von Aufgaben gehört dagegen z. B. auch diese: „Eine Curve zu finden, welche in jedem ihrer Punkte die Eigen„schaft hat, daß das Produkt der in der Richtung der Ordinaten zu zwei „gegebenen Abscissen $x = \alpha$ und $x = \beta$ genommenen Abstände der Tangente „und der Curve, weniger dem Quadrat der zu denselben Punkten der Curve „gehörigen Sehne, ein Maximum oder Minimum werde." — Man sieht sogleich, daß in dieser Aufgabe mehre specifisch verschiedene Unbekannte eingehen, nehmlich erstlich: $y, \frac{\partial y}{\partial x}$, aber auch noch die mit der unbekannten Curve zugleich noch unbekannten, zu $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehörigen constanten Ordinaten derselben, d. h. die unbekannten Werthe von y, die zu $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehören.

scheint es dann zugleich als eine Pflicht, was bei Andern uns unrichtig dünkt, ohne Scheu und anschaulich und überzeugend, aber bescheiden und anspruchlos, bemerklich zu machen.

Wenn übrigens ein Werk leicht zu studiren ist, so ist es doch nicht immer leicht zu lesen. Namentlich scheint dies bei einem Lehrbuche der Fall seyn zu müssen, wo Consequenz die Hauptsache ist, wo aber auch zum leichten Verstehen des folgenden eine genauere Kenntniß des vorhergegangenen nothwendig erfordert wird. In den mündlichen Vorträgen kann nachgeholfen werden, der bloße Leser dagegen wird sich selbst nachhelfen müssen, und in den sorgfältig hinzugefügten Citaten eine bedeutende Erleichterung finden. In diesen Citaten bedeutet (E.) Einleitung und (V.) Variations-Rechnung, so wie (L. d. A.) sich auf das Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis, Berlin 1822 bezieht. Jeder citirte (§.) ohne besondre Auszeichnung bezieht sich immer auf die Abtheilung in welcher er steht.

Berlin im September 1824.

Dr. M. Ohm.

Einleitung.

Hilfssätze aus der Algebra und Elementar-Analysis, so wie auch aus der Differential- und Integral-Rechnung.

I. Aus der Algebra und Elementar-Analysis.

§. 1. Erklärung und Aufgabe.

Eine Gleichung heißt in Bezug auf mehre Ausdrücke x, y, z, etc. etc. eine einfache oder lineäre oder von der ersten Dimension, wenn sie die Form

$$a + bx + cy + dz + \ldots\ldots = o$$

hat, oder doch auf diese Form gebracht werden kann.

Aus jedem Lehrbuche der Algebra sind die verschiedenen Methoden bekannt, mittelst welcher man aus mehren algebraischen Gleichungen, mehre der darin vorkommenden Ausdrücke (Unbekannte genannt) eliminirt. Wir werden hier nur diejenige Methode angeben, welche vorzüglich auf lineäre Gleichungen anwendbar ist, und auf welche wir in der Folge oft werden hinweisen müssen.

Hat man nehmlich z. B. aus den 3, nach x, y, z, u lineären Gleichungen

$$1)\quad V = a\,.x + b\,.y + c\,.z + d.\,u$$

$$2)\quad o = a_1.x + b_1.y + c_1.z + d_1.u$$

$$3)\quad o = a_2.x + b_2.y + c_2.z + d_2.u,$$

die beiden Ausdrücke y und z zu eliminiren, so multiplicire man die zweite mit λ, die dritte mit μ, und addire die Produkte zur ersten Gleichung, und man erhält:

$$4)\ V = (a+\lambda a_1+\mu a_2) \cdot x + (b+\lambda b_1+\mu b_2) \cdot y + (c+\lambda c_1+\mu c_2) \cdot z + (d+\lambda d_1+\mu d_2) \cdot u$$

welche Gleichung richtig ist, was auch λ und μ vorstellen mögen. —

Dann bestimme man λ und μ dadurch, daß man die Coefficienten von y und z der Null gleich setzt, nehmlich $b+\lambda b_1+\mu b_2=0$ und $c+\lambda c_1+\mu c_2=0$; und für diese Werthe von λ und μ reducirt sich dann die Gleichung (4.) auf

$$5)\ V = (a+\lambda a_1+\mu a_2) \cdot x + (d+\lambda d_1+\mu d_2) \cdot u,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist, die y und z nicht mehr enthält.

Es ist leicht, auf demselben Wege aus m gegebenen Gleichungen, eine beliebige Zahl $n\ (<m)$ von, in lineärer Form vorkommenden Ausdrücken zu eliminiren, und das Verfahren bleibt natürlich ungeändert, wenn die hier durch x, y, z, u, etc. vorgestellten Ausdrücke, durch andere Zeichen von beliebiger Bedeutung, etwa durch die Zeichen δy, $d\delta y$, $d^2\delta y$, $d^3\delta y$, etc. vorgestellt seyn sollten, um deren specielle Bedeutung, wenn sie noch eine solche haben sollten, man sich, in Bezug auf die hier vorliegende Aufgabe, gar nicht zu bekümmern hätte.

§. 2. Erklärung.

Ein Ausdruck heißt in Bezug auf gewisse Ausdrücke p, q, r, s, etc. homogen und von der 2ten Dimension, wenn er die Form

$$A \cdot p^2 + B \cdot pq + C \cdot q^2$$

oder $A \cdot p^2 + B \cdot pq + C \cdot q^2 + D \cdot pr + E \cdot qr + F \cdot r^2$ oder etc. etc. etc., hat, wo A, B, C, D, E, F, etc. etc. etc. beliebige, aber nicht p, q, r, etc. enthaltende Coëfficienten sind, auch Null seyn können.

§. 3. Aufgabe.

Die Bedingungen aufzusuchen, welche von A, B, C, erfüllt seyn müssen, wenn der durch $\varphi(p, q)$ bezeichnete homogene Ausdruck der 2ten Dimension in Bezug auf p und q, nehmlich

$$\varphi(p,q) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2$$

für jeden reellen Werth von p und von q, beständig einerlei Zeichen erhält, d. h. beständig positiv oder beständig negativ wird, unter der Voraussetzung, daß A nicht Null ist.

Auflösung.

Man setze

$$\varphi(p, q) = A \cdot (p + fq)^2 + A_1 \cdot q^2$$
$$= A \cdot p^2 + 2Af \cdot pq + \left.\begin{matrix} + Af^2 \\ + A_1 \end{matrix}\right\} q^2$$

und erhält dann zur Bestimmung von f und A_1 die Gleichungen

$$Af = B \text{ und } Af^2 + A_1 = C;$$

woraus $f = \frac{B}{A}$ und $A_1 = C - \frac{B^2}{A} = \frac{AC - B^2}{A}$

folgt. — Nun fällt aber in die Augen, daß $\varphi(p, q)$ für jeden reellen Werth von p und von q, allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, wenn A und A_1 zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, und daß diese Bedingungen nicht nur ausreichen, sondern auch nothwendig erforderlich sind, weil $p + fq$ und q jedes für sich unabhängig von dem andern, $= 0$ genommen werden kann, das Zeichen von $\varphi(p, q)$ also bald von A allein, bald von A_1 allein abhängt.

§. 4. Zusatz.

Man kann auch $\varphi(p, q) = C \cdot (q + f_1 p)^2 + C_1 \cdot p^2$ setzen, wenn C nicht Null ist, und auf die obige Weise verfahren, und erhält dann $C_1 = A - \frac{B^2}{C}$, so wie die Bedin-

gungen, daß C und C_1 zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn müssen, welche daher mit den in (§. 3.) erhaltenen zusammenfallen werden.

Diese Resultate lassen sich auch so aussprechen: Ist $AC > B^2$ und zugleich A oder C $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ *), so ist auch $\varphi(p, q)$ für jeden reellen Werth von p und von q allemal von demselben Zeichen, nehmlich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$.

§. 5. Zusatz.

Ist $A_1 = o$ d. h. $AC = B^2$, so wird $\varphi(p, q) = A \cdot (p + fq)^2$ und dann ist zwar auch $\varphi(p, q)$ allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so oft A $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, jedoch mit Ausnahme derjenigen Werthe von p und q, welche $p + fq = o$ machen, und für welche $\varphi(p, q)$ selber der Null gleich wird.

Wollte man also A, B, C so bestimmen, daß $\varphi(p, q)$ für jeden reellen Werth von p und q entweder einerlei Zeichen behielte oder doch Null würde, und wäre die Art, wie solches geschehen soll, gleichgültig, so dürfte man nur $A_1 = o$ d. h. $AC = B^2$ setzen, und das Zeichen von $\varphi(p, q)$ wäre dann immer mit dem von A oder C einerlei, für jeden reellen Werth von p und von q, der $\varphi(p, q)$ nicht zu Null macht.

§. 6. Zusatz.

Ist aber $A = o$, so hat $\varphi(p, q)$ unmöglich für jeden reellen Werth von p und von q einerlei Zeichen, wenn nicht zugleich auch $B = o$ ist, in welchem Falle $\varphi(p, q) = Cq^2$ wird und allemal mit C einerlei Zeichen hat.

---

*) Ist nehmlich $AC > B^2$, so ist AC nothwendig positiv, folglich haben dann A und C nothwendig allemal ein und dasselbe Zeichen.

§. 7. Zusatz.

Hat endlich $A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2$ für jeden reellen Werth von p und q einerlei Zeichen, so ist dies auch mit

$$A + 2B \cdot p + C \cdot p^2$$

für jeden reelen Werth von p der Fall; und umgekehrt, wie man augenblicklich erkennt, wenn man bedenkt, daß, weil p^2 jedesmal positiv ist, auch $\varphi(p, q)$ und $\frac{\varphi(p, q)}{p^2}$ nothwendig ein und dasselbe Zeichen haben müssen, für jeden reellen Werth von p und von q, also auch für jeden reellen Werth von $\frac{q}{p}$.

§. 8. Aufgabe.

Man soll die Bedingungen aufsuchen, damit der durch $\varphi(p, q, r)$ bezeichnete homogene Ausdruck der 2ten Dimension

$$A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2D \cdot pr + 2E \cdot qr + F \cdot r^2$$

für jeden beliebig reellen Werth von p und von q und von r, beständig einerlei Zeichen behalte, unter der Voraussetzung daß A nicht Null ist.

Auflösung.

Man setze

$$\varphi(p,q,r) = A \cdot (p + fq + f_1 r)^2 + A_1 \cdot (q + g \cdot r)^2 + A_2 \cdot r^2,$$

so erhält man durch Vergleichung (analog dem §. 3.):

$$f = \frac{B}{A};\ f_1 = \frac{D}{A};\ A_1 = C - \frac{B^2}{A};\ g = \frac{E - Af \cdot f_1}{A_1} \text{ und}$$

$$A_2 = F - Af_1^2 - A_1 g^2;$$

woraus sich ergiebt

$$A = A$$

$$A_1 = C - \frac{B^2}{A}$$

$$A_2 = F - \frac{D^2}{A} - \frac{(E - Af \cdot f_1)^2}{A_1},$$

wo für f und f_1 leicht ihre Werthe $\frac{B}{A}$ und $\frac{D}{A}$ geschrieben werden können; und es ist nun offenbar, daß $\varphi(p, q, r)$ für jeden reellen Werth von p, von q und von r, allemal einerlei Zeichen erhält, und zwar

$\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ werden wird, wenn A und A_1 und A_2 zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, und weil man p, q, r, allemal so nehmen kann, daß zwei von den Ausdrücken $p + fq + f_1 r$, $q + gr$ und r der Null gleich werden, der dritte aber beliebig bleibt, so reichen diese Bedingungen nicht nur hin, sondern sie sind auch nothwendig.

§. 9. Zusatz.

Weil man auch

$$\varphi(p,q,r) = A.(p + f^I r + f^I_1 q)^2 + A^I_1.(r + g^I q)^2 + A^I_2.q^2$$

oder, wenn C nicht Null ist,

$$\varphi(p,q,r) = C.(q + f^{II} p + f^{II}_1 r)^2 + C_1.(p + g^{II} r)^2 + C_2.r^2$$

$$\text{oder } = C.(q + f^{III} r + f^{III}_1 q)^2 + C^I_1.(p + g^{III} p)^2 + C^I_2.p^2$$

oder wenn F nicht Null ist, auch

$$\varphi(p,q,r) = F.(r + f^{IV} p + f^{IV}_1 q)^2 + F_1.(p + g^{IV} q)^2 + F_2.q^2$$

$$\text{oder } = F.(r + f^V q + f^V_1 p)^2 + F^I_1.(q + g^V p)^2 + F^I_2.p^2$$

setzen, und jedesmal auf analoge Weise verfahren kann, so wird man vielleicht noch 5 andere Systeme von 3 Bedingungen erhalten, der Form nach von dem in (§. 8.) erhaltenen verschieden, von welchen 6 Systemen jedoch, eben weil jedes einzelne ausreicht und zugleich nothwendig ist, jedes derselben die 5 übrigen in sich schließen muß.

Diese Resultate lassen sich auch so aussprechen:

Ist $ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$

und zugleich $AC > B^2$ und A oder C $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$,

oder zugleich $AF > D^2$ und A oder F $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$,

oder zugleich $CF > E^2$ und C oder F $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$,

so hat $\varphi(p, q, r)$ jedesmal für jeden reelen Werth von p, q, r, einerlei Zeichen und zwar ist solches dann auch allemal
$\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$.

§. 10. Zusatz.

Man kann sich auch leicht noch besonders überzeugen: 1) daß A, C und F nothwendig einerlei Zeichen haben müssen (vorausgesetzt, daß keiner dieser Buchstaben $= 0$ ist); und 2) daß immer zugleich $AC > B^2$, $AF > D^2$, und $CF > E^2$ seyn muß, wenn irgend eines der obigen Systeme von 3 Bedingungen erfüllt ist. — Diese Bemerkung kann aber dazu dienen, die Nicht-Existenz der 3 zusammengehörigen Bedingungen leichter daran zu erkennen, daß A, C, und F nicht einerlei Zeichen haben, oder daß nicht zugleich $AC > B^2$ und $AF > D^2$ und auch $CF > E^2$ ist.

§. 11. Zusatz.

Wäre $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$, so hätte man bloß $\varphi(p, q, r) = A . (p + fq + f_1 r)^2$, und es wäre dann, wenn f und f_1 bestimmte Werthe erhalten haben, das Zeichen von $\varphi(p, q, r)$ offenbar noch immer mit dem von A einerlei für alle möglichen reellen Werthe von p, q und r, nur diejenigen ausgenommen, welche $p + fq + f_1 r = 0$ machen und für welche $\varphi(p, q, r)$ selbst der Null gleich wird.

Wollte man also A, B, C, D, E, F so bestimmen, daß $\varphi(p, q, r)$ für jeden reellen Werth von p, q, r, jedesmal einerlei Zeichen bekommt oder doch Null wird und wäre die Art, wie solches geschieht, gleichgültig, so dürfte man nur $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ zu setzen suchen, und man würde die Gleichungen zwischen A, B, etc. erhalten, für welche $\varphi(p, q, r)$ mit A zugleich einerlei Zeichen haben oder doch Null werden würde. — Weil aber in dem Ausdruck (§. 8.) für A_2, das A_1 selbst im Nenner vorkommt, so setzt jene Entwickelung voraus, daß A_1 nicht Null sey (L. d. A. A. A. I. §. 255. seqq.);

folglich muß man für den Fall, wo $A_1 = o$ werden soll, die Verwandlung des (§. 8.) direkt vornehmen.

Man setze also bloß

$$\varphi(p, q, r) = A \,.\, (p + fq + f_1 r)^2$$

oder $= A \,.\, p^2 + 2Af \,.\, q + Af^2 \,.\, q^2 + 2Af_1 \,.\, r + 2Aff_1 \,.\, qr + Af_1^2 \,.\, r^2$

und erhält durch Vergleichung

$$B = Af,\ C = Af^2,\ D = Af_1,\ E = Aff_1,\ F = Af_1^2;$$

woraus, wenn man f und f_1 eliminirt, die 3 Gleichungen 1) $AC - B^2 = o$; 2) $AF - D^2 = o$ und 3) $BD - AE = o$ hervorgehen, welche von A, B, C, D, E, F erfüllt seyn müssen, wenn $\varphi(p, q, r)$ die letzterwähnte Form soll annehmen können. *)

§. 12. Zusatz.

Ist $A_2 = o$ allein, so hat $\varphi(p, q, r)$ die Form

$$A \,.\, (p + fq + f_1 r)^2 + A_1 \,.\, (q + gr)^2$$

und ist daher allemal $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$, wenn A und A_1 zugleich $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ sind, diejenigen Werthe von p, q und r jedoch ausgenommen, welche zugleich $p + fq + f_1 r = o$ und $q + gr = o$ machen.

Die Bedingung $A_2 = o$ führt aber zu der Gleichung

$$ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = o,$$

die also erfüllt seyn muß, wenn $\varphi(p, q, r)$ auf die obige Form soll gebracht werden können.

§. 13. Zusatz.

Ist $A = o$, so hat $\varphi(p, q, r)$ nie für jeden reellen Werth

---

*) In der Analytischen Darstellung der Variationsrechnung rc. rc. Berlin 1823. p. 112 ist der Umstand, daß die Gleichung $A_2 = 0$ selbst wieder in zwei Gleichungen zerfällt, übersehen worden, und das daselbst p. p. 112. 113 u. 114 stehende, auf die Existenz von nur zwei Bedingungsgleichungen gegründete Raisonnement scheint daher dem vorstehenden zu Folge berichtigt werden zu müssen.

von p, q und r einerlei Zeichen, wenn nicht zugleich die Coefficienten aller mit p behafteten Glieder, nehmlich B und D ebenfalls Null sind; in welchem Falle sich dann $\varphi(p, q, r)$ bloß auf $C.q^2 + 2E.qr + F.r^2$ reducirt, welches der (§. §. 3 — 7.) behandelte einfachere Fall ist.

§. 14. Zusatz.

Uebrigens haben $\varphi(p, q, r)$ und $\frac{\varphi(p, q, r)}{p^2}$ für jeden reellen Werth von p ein und dasselbe Zeichen, was auch q und r, also $\frac{q}{p}$ und $\frac{r}{p}$ für reelle Ausdrücke seyn mögen.

Die oben (§. 8. et seqq.) gefundenen Bedingungen sind daher hinreichend und nothwendig, wenn auch

$$A + 2B.p + C.p^2 + 2D.q + 2E.pq + F.q^2$$

für jeden reellen Werth von p und q jedesmal ein und dasselbe Zeichen behalten sollen.

§. 15. Aufgabe.

Man soll die Bedingungen angeben, unter denen die durch $\varphi(p, q, r, s)$ bezeichnete homogene Funktion der 2ten Dimension (in Bezug auf p, q, r und s), nehmlich

$$A.p^2 + 2B.pq + C.q^2 + 2D.pr + 2E.qr + F.r^2 + 2G.ps + 2H.qs + 2K.rs + L.s^2$$

für jeden reellen Werth von p, q, r und s allemal ein und dasselbe Zeichen behält.

Auflösung.

Man setze

$$\varphi(p, q, r, s) = A.(p + fq + f_1 r + f_2 s)^2 + A_1.(q + gr + g_1 s)^2 + A_2.(r + hs)^2 + A_3.s^2$$

und erhält durch Vergleichung

$$f = \frac{B}{A},\ f_1 = \frac{D}{A},\ f_2 = \frac{G}{A},\ g = \frac{E - Aff_1}{A_1},\ g_1 = \frac{H - Aff_2}{A_1}$$

$$h = \frac{K - Af_1 f_2 - \frac{(E - Aff_1)(H - Aff_2)}{A_1}}{A_2}$$

und

$$A = A$$

$$A_1 = C - \frac{B^2}{A}$$

$$A_2 = F - \frac{D^2}{A} - \frac{(E - Aff_1)^2}{A_1}$$

$$A_3 = L - \frac{G^2}{A} - \frac{(H - Aff_2)^2}{A_1} - \frac{\left(K - Af_1f_2 - \frac{(E - Aff_1)(H - Aff_2)}{A_1}\right)^2}{A_2}$$

wo überall noch für f, f_1, f_2, ihre Werthe $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{A}$ und $\frac{G}{A}$ gesetzt werden müssen.

Und es ist nun klar, daß $\varphi(p, q, r, s)$ nothwendig für jeden reellen Werth von p, q, r und s, einerlei Zeichen erhalten und jedesmal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, wenn A, A_1, A_2 und A_3 zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind; auch daß diese 4 Bedingungen ausreichen und zugleich nothwendig sind. (Vergleiche §. §. 3 und 8.).

§. 16. Zusatz.

Weil die Funktion $\varphi(p, q, r, s)$ in Bezug auf p, q, r und s symmetrisch genannt werden kann, so kann man ihr wie im (§. 4. und §. 9.) noch viele andere ähnliche Formen geben, und erhält dann noch mehrere Systeme von 4 solchen Bedingungen, von denen jedoch jedes einzelne allemal alle die übrigen Systeme bereits in sich schließen muß. — Es ist nicht schwer, diese übrigen Systeme von 4 Bedingungen aus irgend einem, bloß durch gehörige Verwechslung der Buchstaben A, B, C, D, etc. etc. L, zu erhalten.

§. 17. Zusatz.

Wäre $A_1 = o$, $A_2 = o$, $A_3 = o$, so hätte man bloß

$$\varphi(p, q, r, s) = A \,.\, (p + fq + f_1 r + f_2 s)^2$$

und dieses $\varphi(p, q, r, s)$ wäre dann noch immer für jeden

reellen Werth von p, q, r und s mit A zugleich $\frac{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, mit Ausnahme jedoch derjenigen Werthe von p, q, r, s, welche $p+fq+f_1r+f_2s=0$ machen, und für welche auch $\varphi=0$ wird.

Sollten aber die Bedingungsgleichungen gefunden werden, welche zwischen A, B, C, etc. etc. L, statt finden müssen, damit $\varphi(p, q, r, s)$ auf diese hiesige Form gebracht werden könnte, so müßte man A_1, A_2 und A_3 der Null gleich setzen, würde aber dann in der Gleichung $A_2=0$, die 0 aus A_1 im Nenner haben, während $A_3=0$, die Null aus A_1 und A_2 im Nenner enthielte. Aus dem (§. 11.) bereits bemerkten Grunde muß man also diese Aufgabe direkt vornehmen, wie (§. 11.) für den einfachern Fall geschehen, und erhält dann nicht 3 solcher Bedingungsgleichungen, wie dies aus der bloßen Ansicht von $A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$ scheinen könnte, sondern 6 solche Gleichungen, in so ferne die Gleichung $A_2=0$ in zwei besondere, und die Gleichung $A_3=0$ in 3 besondere Gleichungen noch zerfällt. Diese 6 Bedingungsgleichungen sind aber:

1) $AC-B^2=0$; 2) $AF-D^2=0$; 3) $AL-G^2=0$; 4) $AE-BD=0$; 5) $AH-BG=0$; und 6) $AK-DG=0$; so daß, wenn diese erfüllt sind, es immer möglich ist, $\varphi(p,q,r,s)$ auf die hiesige Form $A.(p+fq+f_1r+f_2s)^2$ zu bringen. *)

§. 18. Zusatz.

Wollte man $\varphi(p, q, r, s)$ bloß auf die Form

$$A(p+fq+f_1r+f_2s)^2+A_1(q+gr+g_1s)^2$$

bringen, so müßte man $A_2=0$ und $A_3=0$ setzen, um die Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von $\varphi(p,q,r,s)$ zu erhalten, ohne deren Erfüllung diese Form von $\varphi(p,q,r,s)$ nicht möglich wäre. Aber auch hier muß man die Unter-

*) Die Note zu (§. 11.) findet auch hier statt.

suchung nach (§. 11.) direkt vornehmen, und erhält 3 solche Bedingungsgleichungen, in so ferne $A_3 = 0$ selbst wieder in 2 besondere Gleichungen zerfällt. Diese 3 Gleichungen sind aber folgende

1) $ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = 0$

2) $ACL + 2BGH - AH^2 - CG^2 - LB^2 = 0$

3) $ACK + BDH + BEG - AEH - CDG - B^2K = 0$;

und sind sie erfüllt, so ist klar, daß φ entweder Null seyn wird, oder allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ für alle reellen Werthe von p, q, r und s, wenn A und A_1 zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind.

§. 19. Zusatz.

Man kann auch bloß $A_3 = 0$ setzen, wodurch man eine Bedingungsgleichung erhält, welche erfüllt seyn muß von den Coefficienten A, B, C, etc. etc. L, wenn $\varphi(p, q, r, s)$ gerade diese Form soll annehmen können, und unser φ ist dann allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn A, A_1 und A_2 zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, mit Ausnahme jedoch derjenigen reelen Werthe von p, q, r und s, welche $\varphi = o$ machen. (Vergl. §. 12.)

§. 20. Zusatz.

Ist $A = 0$, so wird φ nicht für alle reellen Werthe von p, q, r und s, einerlei Zeichen behalten können, wenn nicht die Coefficienten aller übrigen mit p behafteten Glieder, nehmlich B, D und G zugleich Null sind, und dann reducirt sich φ auf den (§. 8.) bereits betrachteten einfachern Fall. (Vergl. §. §. 6. 13.)

§. 21. Zusatz.

Auch haben $\varphi(p, q, r, s)$ und $\frac{\varphi(p, q, r, s)}{p^2}$ für jeden reellen Werth von p einerlei Zeichen, welche reellen Werthe auch

q, r, s, also auch $\frac{q}{p}, \frac{r}{p}, \frac{s}{p}$ haben mögen, so daß man dieselben Bedingungen erhalten wird, wenn $\varphi(1, q, r, s)$ oder wenn $\varphi(p, q, r, s)$ für jeden reellen Werth von q, r, s, oder p, q, r, s beständig einerlei Zeichen behalten sollen. (Vergl. §. §. 7. 14.)

§. 22. Lehrsatz.

Die in Bezug auf die n Ausdrücke p, q, r, s, t, etc. etc. und w, homogene Funktion der 2ten Dimension, deren ersten Glieder $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 +$ etc. etc. etc. sind, und die durch φ bezeichnet seyn mag, läßt sich unter der Voraussetzung, daß A nicht Null ist, allemal auf die Form

$$\begin{aligned} & A.(p + fq + f_1 r + f_2 s + f_3 t + \ldots\ldots\ldots + f_{n-2}.w)^2 \\ & + A_1.(q + gr + g_1 s + g_2 t + \ldots\ldots\ldots + g_{n-3}.w)^2 \\ & \quad + A_2.(r + hs + h_1 t + \ldots\ldots\ldots + h_{n-4}.w)^2 \\ & \quad + \text{etc. etc.} \qquad\qquad + A_{n-1}.\ w^2 \end{aligned}$$

bringen, und ist allemal für jeden reellen Werth von p, q, r, etc. w, aber auch nur dann allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn A, A_1, A_2 bis A_{n-1} alle zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind. (Vergl. §. §. 3. 8. und 15.)

Beweis. Denn, wenn man A mitrechnet, so kommen in der ersten Zeile n unbestimmte Coefficienten vor, in der 2ten Zeile dagegen n-1 dergleichen, und in jeder folgenden Zeile ein Coefficient weniger, als in der vorhergehenden, bis die letzte Zeile nur einen einzigen solchen unbestimmten Coefficienten enthält.

Die Anzahl aller unbestimmten Coefficienten (A mitgezählt) ist daher

$$= n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots + 1 \text{ oder } = \frac{n(n+1)}{2},$$

und eben so groß ist auch die Zahl der Glieder in der gegebenen homogenen Funktion φ der 2ten Dimension, also eben

so groß die Zahl der Gleichungen, welche sich aus der Identität der einzelnen Glieder ergeben. Zugleich geht aus der Form dieser Gleichungen hervor, daß sie auch allemal wirklich zur Bestimmung der unbestimmten Coefficienten f, f_1, f_2, etc. g, g_1 etc., h, etc. etc. etc. endlich $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ dienen werden, sobald A nicht Null ist. — Da ferner jede der folgenden Zeilen in dem oben stehenden verwandelten φ einen der Ausdrücke p, q, r, s, etc. etc. weniger enthält, als die vorhergehende; da zugleich, unter der Voraussetzung, daß A, B, C, D, etc. ... L, alle reell sind, auch die unbestimmten Coefficienten, wie aus der Form der sie bestimmenden Gleichungen hervorgeht, reell werden, so kann man den Ausdrücken p, q, r, s, etc. allemal solche reelle Werthe geben, daß alle Zeilen in dem umgeformten φ der Null gleich werden, bis auf irgend eine einzige, welche jeden möglichen andern Werth, der nicht Null ist, erhalten kann. Daraus folgt aber, daß die n-1 Bedingungen des Lehrsatzes nicht bloß ausreichen, sondern auch zugleich nothwendig sind.

Anmerkung 1. Dieser letzterwähnte Theil des Beweises ist wohl zu beachten. Es ist z. B. möglich, die homogene Funktion von p und q der 4ten Dimension

$$A \cdot p^4 + B \cdot p^3 q + C \cdot p^2 q^2 + D \cdot p q^3 + E \cdot q^4,$$

die durch $\psi(p, q)$ bezeichnet seyn mag, auf die Form

$$A \cdot (p^2 + fpq + f_1 q^2)^2 + A_1 \cdot q^2 (p + gq)^2 + A_2 \cdot q^4$$

zu bringen, indem man A_1 ganz beliebig aber nicht Null nimmt, und dann f, f_1, g und A_2 ohne weiters bestimmt. So oft nun A, A_1 und A_2 zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, ist nothwendig $\psi(p, q)$ für jeden reellen Werth von p und q allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$. Ob aber umgekehrt, wenn A, A_1 und A_2 nicht alle zugleich einerlei Zeichen haben, dann $\psi(p, q)$ für jeden reellen Werth von p und q nicht doch allemal ein und dasselbe Zeichen behalten könne, scheint hier nicht unmittelbar verneint oder bejaht werden zu können, wie in dem vorstehenden Lehrsatz im ähnlichem Falle geschehen kann, weil es im allgemeinen nicht möglich ist, dem p und q solche Werthe zu geben, daß von den 3 Theilen

$$(p^2 + f \cdot pq + f_1 \cdot q^2)^2 \text{ und } q^2 \cdot (p + gq)^2 \text{ und } q^2$$

irgend zweie der Null gleich werden können, ohne daß der dritte zugleich mit Null würde. So wie nehmlich der dritte Theil nicht Null wäre, so bekäme ψ das Zeichen seines vorstehenden Coefficienten A, A_1 oder A_2, (für diese Werthe von p und q) und es bekäme also dann ψ nothwendig für gewisse Werthe von p und q, das Zeichen von A, für andere das Zeichen von A_1, für noch andere das Zeichen von A_2, also nicht allemal dasselbe Zeichen, wenn A, A_1 und A_2 nicht selbst einerlei Zeichen haben.

Noch kann bemerkt werden, daß weil in vorliegender Verwandlung A_1 beliebig genommen werden kann, man allemal A_1 mit A zugleich positiv/negativ, und in gegebenen besondern Fällen, dann vielleicht noch so nehmen könne, daß A_2 dasselbe Zeichen erhält.

Anmerkung 2. Nimmt man den aus der Lehre der höhern Gleichungen bekannten Satz zu Hülfe, daß

$$M + 2N \cdot x + P \cdot x^2$$

für jeden reellen Werth von x einerlei Zeichen erhalten werde, und zwar das von M oder P, wenn die Gleichung

$$M + 2N \cdot x + P \cdot x^2 = 0$$

für x zwei imaginäre Werthe liefert, und bringt man damit den andern Satz in Verbindung, daß diese Wurzelwerthe allemal imaginär sind, wenn $MP > N^2$ ist, so folgt sogleich:

1) $A + 2B \cdot p + C \cdot p^2$, wird für jeden reellen Werth von p einerlei Zeichen und zwar das von A oder C annehmen, wenn $AC > B^2$ ist (vergl. §. 4. und §. 7.);

2) $A + 2B \cdot p + C \cdot p^2 + 2D \cdot q + 2E \cdot pq + F \cdot q^2$ oder

$(A + 2B \cdot p + C \cdot p^2) + 2(D + E \cdot p) \cdot q + F \cdot q^2$ hat für jeden reellen Werth von p und q einerlei Zeichen, und zwar das von F, wenn für jeden reellen Werth von p seyn wird

$$F \cdot (A + 2B \cdot p + C \cdot p^2) > (D + E \cdot p)^2 \text{ oder}$$

$(AF - D^2) + 2(BF - DE) \cdot p + (CF - E^2) \cdot p^2$ positiv, also (nach n. 1.) wenn $AF - D^2$ oder $CF - E^2$ positiv, und zugleich

$$(AF - D^2)(CF - E^2) > (BF - DE)^2$$ ist (vergl. §. 8. und §. 14.);

3) der Ausdruck

$$A + 2B \cdot p + C \cdot p^2 + 2D \cdot q + 2E \cdot pq + F \cdot q^2 + 2G \cdot p + 2H \cdot pr + 2K \cdot qr + L \cdot r^2$$

(wenn man $x = r$, $M = A + 2B \cdot p + C \cdot p^2 + 2D \cdot q + 2E \cdot pq + F \cdot q^2$,

$N = G + H \cdot p + K \cdot q$ und $P = L$ setzt) hat für jeden reellen Werth von p, q und r einerlei Zeichen, und zwar das von L, wenn für jeden reellen Werth von p und q

$L(A+2B.p+C.p^2+2D.q+2E.pq+F.q^2) > (G+H.p+K.q)^2$, oder
$(AL-G^2)+2(BL-GH)p+(CL-H^2)p^2+2(DL-GK)q+2(EL-HK)pq$
$+(FL-K^2)q^2$ positiv ist, d. h. also: wenn $FL-K^2$ positiv und zugleich für jeden reellen Werth von p

$$(FL-K^2)[(AL-G^2)+2(BL-GH)p+(CL-H^2)p^2]$$
$$> ((DL-GK)+(EL-HK)p)^2$$

oder

$$[(FL-K^2)(AL-G^2)-(DL-GK)^2]+2[(FL-K^2)(BL-GH)$$
$$-(DL-GK)(EL-HK)] . p+[(FL-K^2)(CL-H^2)-(EL-HK)^2] . p^2$$

positiv ist, welches letztere wiederum nach (1.) der Fall seyn wird, wenn der 1ste oder 3te Coefficient positiv, und zugleich das Produkt des 1sten und 3ten Coefficienten größer ist, als das Quadrat des halben 2ten Coefficienten dieses letztern (nach p geordneten) Ausdrucks; (vergl. §. 15. und §. 21.).

Es ist aber sehr leicht, mittelst der angeführten beiden Sätze, von der allgemeinen Aufgabe des (§. 22.) jeden zusammengesetzten Fall, wo n solche Ausdrücke p, q, r, etc. vorkommen, auf den nächstvorhergehenden einfachern Fall zurückzuführen, in welchem nur n-1 dieser Ausdrücke p, q, etc. noch vorkommen, und so zurückgehend dieselben Bedingungen zu finden, welche auch auf dem Wege des (§. 22.) gefunden worden seyn werden.

Diese letztere Methode hat aber den Vortheil, daß sie auf jede homogene Funktion von p, q, etc. etc. von jeder höhern geraden Dimension anwendbar ist. Es hat nehmlich z. B. der Ausdruck

$$M+Nx+Px^2+Qx^3+Rx^4$$

wie aus der Lehre der höhern Gleichungen (L. d. A. A. A. II. Th. Kap. XXI.) bekannt ist, nothwendig für jeden reellen Werth von x dasselbe Zeichen, wenn die 4 Wurzelwerthe der Gleichung

$$M+N.x+P.x^2+Q.x^3+R.x^4=0$$

alle imaginär sind. Verbindet man also damit die Bedingungen, unter welchen diese 4 Wurzelwerthe nothwendig imaginär werden müssen, und die auch erfüllt seyn müssen, wenn gedachte Wurzelwerthe alle imaginär werden können; so hat man die in der (Anmerkung 1.) gesuchten Bedingungen. — Es stehen daher diese und ähnliche Untersuchungen mit der Lehre der höhern Gleichungen in nahem Zusammenhange.

Anmerkung 3. Könnte man die Lehre vom Größten und Kleinsten als bekannt voraussetzen, so dürfte man nur die Bedingungen suchen, unter welchen eine solche Funktion $\varphi(p, q)$ oder $\varphi(p, q, r)$ oder $\varphi(p, q, r, s)$ etc. etc. ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ und zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ wird, weil

dann nothwendig alle Werthe von φ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ seyn mußten; und man würde auf diesem Wege nochmal zu denselben Resultaten gelangen.

§. 23. Zusatz.

Soll das φ des (§. 22.) bloß die Form annehmen

$$A \,.\, (p + fq + f_1 r + f_2 s + \text{etc. etc. } f_{n-2} w)^2,$$

so kann man, um die Bedingungen zu finden, welche von den Coefficienten von φ erfüllt seyn müssen, wenn diese Verwandlung möglich werden soll, die gefundenen Ausdrücke für A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1} jeden für sich der Null gleich setzen. Ehe man aber schließt, daß deshalb n-1 solche Bedingungsgleichungen existiren, muß man erst untersuchen, ob diese Gleichungen $A_1 = o$, $A_2 = o$, $A_3 = o$, ... $A_{n-1} = o$ nicht sich widersprechende Formen enthalten, oder ob sie nicht selbst wieder in mehrere für sich stehende unabhängige Gleichungen zerfallen; und da wird man finden, daß die Gleichung

$A_2 = o$ in 2 besondere Gleichungen,
$A_3 = o$ in 3 solche,
$A_4 = o$ in 4 dergleichen,
u. s. w. fort, zuletzt
$A_{n-1} = o$, in n-1 solche besondre Gleichungen zerfällt, so daß mit Inbegriff der ersten Gleichung $A_1 = 0$, in Allem $1 + 2 + 3 + \ldots. + (n-1)$ d. h. $\frac{n(n-1)}{2}$ solche Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von φ existiren, welche alle erfüllt seyn müssen, wenn obige Verwandlung von φ möglich seyn soll.

Den Principien eines strengen Kalkuls ist es angemessener, diese Verwandlung und die Bestimmung der Zahl dieser Bedingungsgleichungen lieber direkt vorzunehmen. Es kommen aber in dem, dem φ gleich gesetzten Ausdruck

$$A \,.\, (p + fq + f_1 r + f_2 s + \ldots. + f_{n-2} w)^2$$

wenn man A mitzählt, n unbestimmte Coefficienten vor, zwischen denen die Vergleichung der einzelnen Glieder $\frac{n(n+1)}{2}$

Gleichungen liefert. Eliminirt man daher aus diesen letzterwähnten Gleichungen diese n unbestimmten Coefficienten A, f, f_1, f_2, etc. f_{n-2}, so bleiben $\frac{n(n+1)}{2} - n$ d. h. $\frac{n(n-1)}{2}$ Eliminationsgleichungen zwischen den Coefficienten von φ als die fraglichen Bedingungsgleichungen übrig. *) (Vergl. §. §. 5. 11. und 17.).

Sind aber diese Bedingungsgleichungen erfüllt, so wird φ jedesmal mit A einerlei Zeichen haben, für jeden reellen Werth von p, q, r, s, etc., mit Ausnahme derjenigen, welche $\varphi = o$ machen.

§. 24. Zusatz.

Ist $m < n-1$ und v der $m+1^{te}$ der Ausdrücke p, q, r, etc. etc. und will man die Bedingungsgleichungen suchen, welche von den Coefficienten von φ erfüllt seyn müssen, damit φ die Form

$$\begin{aligned} &A . (p+fq+f_1r+f_2s+f_3t+\ldots\ldots+f_{n-2}w)^2 \\ &+A_1 . (q+gr+g_1s+g_2t+\ldots\ldots+g_{n-3}w)^2 \\ &+\ldots. \\ &+A_m \qquad (v+\ldots\ldots+l_{n-m-2}w)^2 \end{aligned}$$

annehmen könne, so müßte man die in (§. 22.) für A_{m+1}, A_{m+2} ... bis A_{n-1} gefundenen Ausdrücke einzeln $= o$ setzen. Die so entstehenden Gleichungen würden aber wieder beziehlich in 1, 2, 3, ... $n-1-m$ einzelne Gleichungen zerfallen und daher zusammen $\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten A, B, C, etc. etc. liefern. — Dieselben würde man erhalten, wenn man die Verwandlung

---

*) In der: Analytischen Darstellung der Variationsrechnung etc. Berlin 1823. muß also das Raisonnement p. 114 eine bedeutende Umänderung erleiden, in so ferne aus den dortigen Gleichungen (II. und III.) nicht m (wie es dort heißt) sondern $\frac{m(m+1)}{2}$ Gleichungen hervorgehen.

von φ, wie sie hier verlangt wird, direkt vornehmen wollte. Man hätte nehmlich, wenn man A mitrechnet, in Allem

$$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+(n-m) \text{ d. h. } \frac{(2n-m)(m+1)}{2} \text{ un-}$$

bestimmte Coefficienten, welche aus den $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen, die aus der Vergleichung der einzelnen Glieder sich ergeben, eliminirt, $\frac{n(n+1)-(2n-m)(m+1)}{2} = \frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$ d. h. eben so viele Bedingungsgleichungen liefern, wie oben schon gefunden wurde.

Dabei ist klar, daß φ entweder Null werden oder allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, für jeden reellen Werth von p, q, r, s, etc., wenn $A, A_1, A_2, \ldots$ bis A_m alle zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind. (Vergl. §. §. 12. 18. und 19.).

§. 25. Zusatz.

Ist $A=o$, so wird φ nicht für jeden reellen Werth von p, q, r, etc. einerlei Zeichen behalten können, wenn nicht alle von p afficirten Coefficienten in φ mit A zugleich Null sind. Und in diesem Falle reducirt sich φ auf den nächst einfachern Fall, wo nur noch n-1 der Ausdrücke q, r, s, etc. vorkommen. (Vergl. §. §. 12. 20.).

Anmerkung. Wir verlassen diese Gattung von Untersuchungen und wenden uns zu solchen, die vorzüglich Reihen (endliche oder unendliche) zum Gegenstand haben.

§. 26. Erklärung.

Das Produkt von m Faktoren

$$a(a+r)(a+2r)\ldots(a+(m-1)r)$$

wird nach *Kramp* durch $a^{m|r}$ bezeichnet, und eine Fakultät oder *Faktorielle* genannt; a die *Basis*, m der *Exponent*, r die *Differenz* der Fakultät.

§. 27. Lehrsätze.

Unter der Voraussetzung, daß die Exponenten o oder ganze positive Zahlen bedeuten, hat man

I. $a^{m|r} = (a+(m-1)r)^{m|-r}$; II. $a^{m+n|r} = a^{m|r} . (a+mr)^{n|r}$

III. $a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}}$; IV. $h^m . a^{m|r} = (ha)^{m|rh}$

Auch V. $a^{1|r} = a$ und VI. $a^{0|r} = 1$.

§. 28. Erklärung.

Das Produkt $1.2.3.4.\ldots.m$ oder richtiger, die Fakultät $1^{m|1}$ oder $m^{m|-1}$ wird nach Kramp durch m' oder $m!$ bezeichnet.*)

§. 29. Zusatz.

Von diesen Ausdrücken bemerke man

$$\frac{(m+n)!}{m!\ n!} = \frac{(m+n)^{n|-1}}{n!} = \frac{(m+n)^{m|-1}}{m!}$$

und jeder dieser Ausdrücke ist der Binomial-Coefficient von dem Gliede $a^m\, b^n$ in der Entwicklung der Potenz $(a+b)^m$. — Ferner ist:

$0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 2$;
$3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$;
$6! = 720$; u. s. w. f.

§. 30. Erklärung.

Vorkommende Reihen, endliche oder unendliche, werden hier immer durch ihr allgemeines Glied ausgedrückt, welchem, in eckigen Klammern eingeschlossen, man das Summenzeichen

---

*) Es scheint das Zeichen $m!$ beliebter und allgemeiner zu werden als m'. Wenn ich daher auch in meinen frühern Schriften; so wie zuerst in der Abhandlung: De elev. ser. infin. sec. ord. etc. Erlang. 1811. das letztere Zeichen vorzugsweise gebraucht habe, so werde ich mich doch in der Folge des erstern vorzüglich bedienen, und auch hierdurch mein Verlangen nach einer festen und gleichförmigen Bezeichnung durch die That aussprechen.

S vorschreibt; der Zeiger, (oder die Zeiger, wenn mehrere vorkommen) werden durchgehends durch die Buchstaben des kleinen deutschen Alphabets vorgestellt, für welchen jeden einzelnen also allemal Null und alle ganzen Zahlen gesetzt gedacht werden müssen, entweder bis in's unendliche oder mit Einschränkungen, welche letztern dann allemal durch untergesetzte Gleichungen zwischen diesen kleinen deutschen Buchstaben ausgedrückt werden. *)

§. 31. Zusatz.

Ist m eine ganze positive Zahl oder Null, so läßt sich der sogenannte binomische Lehrsatz nun so schreiben:

$$(a+b)^m = S.\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}\,a^{\mathfrak{a}}.b^{\mathfrak{b}}\right],\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$$

oder auch so:

$$\frac{(a+b)^m}{m!} = S.\left[\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\right].\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$$

Der trinomische Lehrsatz gewinnt dagegen diese Gestalt:

$$(a+b+c)^m = S.\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!}\,a^{\mathfrak{a}}.b^{\mathfrak{b}}.c^{\mathfrak{c}}\right],\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m$$

oder auch:

$$\frac{(a+b+c)^m}{m!} = S.\left[\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\cdot\frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\right].\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m$$

Und so fortfahrend, ergiebt sich der polynomische Lehrsatz

$$(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m = S.\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\ldots}\,a^{\mathfrak{a}}.b^{\mathfrak{b}}.c^{\mathfrak{c}}.d^{\mathfrak{d}}\ldots\right]\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots=m$$

$$\frac{(a+b+c+d+\ldots)^m}{m!} = S.\left[\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\cdot\frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\cdot\frac{d^{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{d}!}\ldots\right]\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots=m$$

*) Vergl. Lehrbuch der Arithm. Algebr. und Analys. Berlin 1822. II. Theil. p. 41. seqq. und die Hauptquelle: Rothe's combinat. Integralrechnung. Nürnberg 1820.

§. 32. Zusatz.

Setzt man hier statt $a,\ b,\ c,\ d,$ etc., $\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},$ etc.
beziehlich $x.a_1, x^2.a_2, x^3.a_3, x^4.a_4,$ etc., $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ etc.
so erhält man:

$$\frac{(x.a_1+x^2.a_2+x^3.a_3+x^4.a_4+\ldots)^m}{m!}$$

$$= S.\left[\frac{(a_1)^{\mathfrak{a}_1}}{\mathfrak{a}_1!}\cdot\frac{(a_2)^{\mathfrak{a}_2}}{\mathfrak{a}_2!}\cdot\frac{(a_3)^{\mathfrak{a}_3}}{\mathfrak{a}_3!}\cdots\cdots\times x^{\mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+4\mathfrak{a}_4+\ldots}\right]$$
$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4+\ldots\ldots=m$$

oder wenn man die Glieder rechts nach Potenzen von x ordnet (dies geschieht ganz einfach dadurch, daß man für den, x afficirenden Exponenten, einen einzigen neuen deutschen Buchstaben $\mathfrak{p}$ schreibt, und die Gleichung $\mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+\ldots\ldots+\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ darunter setzt.) *):

$$\frac{(x.a_1+x^2.a_2+x^3.a_3+x^4.a_4+\ldots\ldots)^m}{m!}$$

$$= S.\left[\frac{(a_1)^{\mathfrak{a}_1}}{\mathfrak{a}_1!}\cdot\frac{(a_2)^{\mathfrak{a}_2}}{\mathfrak{a}_2!}\cdot\frac{(a_3)^{\mathfrak{a}_3}}{\mathfrak{a}_3!}\cdots\frac{(a_\mathfrak{p})^{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}}}{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}!}\times x^\mathfrak{p}\right]$$
$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\ldots\ldots+\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=m$$
$$\mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+\ldots\ldots+\mathfrak{p}.\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$$

Und will man hievon den Coefficienten von x^n, so erhält man als solchen augenblicklich

---

*) Eigentlich, wenn man sich die unendliche Reihe $x.a_1+x^2.a_2$ + etc. etc. auf die m^{te} Potenz erhoben denkt, ist in dem allgemeinen Gliede die Zahl der Faktoren unendlich, daher auch die Zahl der deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3,$ etc. unendlich groß, sowohl in den Bedingungsgleichungen, als auch in dem Exponenten von x. — Weil aber, wenn der Exponent von x, nehmlich $\mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+$ etc. etc., einen bestimmten Werth $\mathfrak{p}$ haben soll, die Glieder $(\mathfrak{p}+1)\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+1}$, $(\mathfrak{p}+2)\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+2}$, etc., wenn für den deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+1}$ oder $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+2}$, etc., etwas anderes geschrieben wird als Null, die Zahl $\mathfrak{p}$ bereits übertreffen würden, und dies nicht seyn darf (weil keiner der deutschen Buchstaben eine negative Zahl vorstellt, sondern nach und nach o und jede ganze positive Zahl, so lange sie den beschränkenden Bedingungsgleichungen entspricht), so kann man $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+2},$ etc. etc. alle = o setzen, wo dann alle die nach $(a_\mathfrak{p})^{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}}$ folgende Faktoren im allgemeinen Gliede, weil sie = 1 sind, weggelassen werden können.

$$S.\left[\frac{(a_1)^{\mathfrak{a}_1}}{\mathfrak{a}_1!}\cdot\frac{(a_2)^{\mathfrak{a}_2}}{\mathfrak{a}_2!}\cdot\frac{(a_3)^{\mathfrak{a}_3}}{\mathfrak{a}_3!}\cdots\cdot\frac{(a_n)^{\mathfrak{a}_n}}{\mathfrak{a}_n!}\right]$$

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4+\ldots+\mathfrak{a}_n=m,\quad \mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+\ldots+n\,\mathfrak{a}_n=n$$

der noch mit $m!$ multiplicirt werden muß, wenn man denselben n^{ten} Coefficienten von

$(x.a_1+x^2.a_2+x^3.a_3+\ldots)^m$ haben will, während er selbst noch mit $n!$ multiplicirt werden müßte, wenn aus ihm der Coefficient von $\frac{x^n}{n!}$ werden sollte.

Anmerkung. Es ist absichtlich diese Entwickelung hier etwas näher berührt worden, weil ein ähnliches Verfahren ausreicht, um in dem Anhange die n^{ten} Variationen beliebiger Ausdrücke mit Leichtigkeit angeben zu können. — Eben deshalb mag auch noch hier Beispielsweise gezeigt werden, wie sich solche allgemeine Resultate für besondre Fälle in ihrer Entwickelung gestalten. — Sey, nehmlich von der 3ten Potenz der unendlichen Reihe $x.a_1+x^2.a_2+x^3.a_3+$ etc. etc. der Coefficient von x^7 zu entwickeln, so ist solcher nach der vorstehenden Formel allgemein ausgedrückt

$$(\text{♂}) = S.\left[3!\,\frac{(a_1)^{\mathfrak{a}_1}.(a_2)^{\mathfrak{a}_2}.(a_3)^{\mathfrak{a}_3}.(a_4)^{\mathfrak{a}_4}}{\mathfrak{a}_1!\;\mathfrak{a}_2!\;\mathfrak{a}_3!\;\mathfrak{a}_4!}\right]$$

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4=3;\quad \mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+4\mathfrak{a}_4=7.$$

Um nun die einzelnen Glieder dieser Form zu entwickeln, sucht man zuerst alle möglichen Systeme von Werthen für die deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, etc. die Null oder ganze positive Zahlen sind, und welche den beiden Gleichungen

1) $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4=3$; und 2) $\mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+4\mathfrak{a}_4=7$

genügen. Dies einfacher zu machen, subtrahire man diese Gleichung (1.) von der (2.) und man kann zur Bestimmung der gedachten Werthe nehmen

3) $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_4=3$ und 4) $\mathfrak{a}_2+2\mathfrak{a}_3+3\mathfrak{a}_4=4$.

Die Gleichung (4.) giebt nun alle Werthe von $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ während die Gleichung (3.) allemal den Werth von $\mathfrak{a}_1$ dazu liefert, der aber nicht negativ werden darf; und so erhält man folgende drei Systeme von Werthen

$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1$
1	0	1	1
0	2	0	1
0	1	2	0

und das allgemeine Glied (♂) liefert daher 3 Glieder, so daß sich

$6(a_1 . a_2 . a_4 + \frac{1}{2} . a_1 . (a_3)^2 + \frac{1}{2}(a_2)^2 . a_3)$ als der gesuchte Coefficient von x^7 in der Entwickelung der 3ten Potenz der unendlichen Reihe $xa_1 + x^2 . a_2 +$ etc. etc., nach Potenzen von x, ergiebt.

II. Aus der Differential- und Integralrechnung.

§. 33. Erklärungen.

Jeden Ausdruck V nennt man, in so ferne er von x abhängig ist, und in so ferne diese Abhängigkeit berücksichtigt werden soll, eine **Funktion von x.** Er heißt dagegen eine Funktion von x und y, wenn man seine Abhängigkeit von x und auch von y berücksichtigen will. — In Bezug auf diese gegenseitige Abhängigkeit, nennt man x, oder y u. s. w. und auch V selbst, **veränderliche Ausdrücke**, oder schlechthin **Veränderliche.** — Man kann sich aber Funktionen von beliebig viel Veränderlichen denken.

Wir unterscheiden jedoch genau **unmittelbare** (explicite), mittelbare (implicite) und **gemischte** Funktionen von x, oder von x und y, u. s. w. f. — Denken wir uns nehmlich unter V einen Ausdruck, der x nicht enthält, aber u, während dieses u selbst wiederum eine Funktion von x vorstellt, so **enthält V das x bloß implicit in u,** und V heißt deshalb eine **mittelbare** Funktion von x. Denken wir uns aber in V statt u den durch u vorgestellten Ausdruck in x wirklich gesetzt, so daß V jetzt einen Ausdruck repräsentirt, der u nicht mehr, sondern x wirklich (**explicit**) enthält, so ist V eine **unmittelbare** Funktion von x. Enthält endlich V das x explicit, aber auch noch u, also das x auch noch implicit in u, so heißt V eine **gemischte** Funktion von x.

Dieselben Unterschiede mag man noch bei Funktionen von beliebig viel Veränderlichen statt finden lassen.

Auch wollen wir in allen, dem eben aufgestellten ähn-

lichen Fällen, das x den **absolut unabhängigen** Veränderlichen, das u den **relativ unabhängigen Veränderlichen**, das V dagegen selbst den **abhängig Veränderlichen** nennen.

Denjenigen Veränderlichen endlich, von welchem **alle** übrigen Veränderlichen als Funktionen (als abhängig) angesehen werden sollen (in einer gegebenen Untersuchung) nennen wir allemal den **Ur-Veränderlichen**.

§. 34. Erklärung.

Ist V eine Funktion von x, und a ein Werth von x, so bezeichnen wir durch V_a oder $(V)_a$ das was aus V wird, wenn man überall a statt x schreibt. — Also bedeutet z. B. auch V_{x+h} das, was aus V wird, im Falle $x+h$ statt x gesetzt werden sollte.

Eben so wenn V eine Funktion der beiden Veränderlichen x und y ist, und a ein Werth von x und b ein Werth von y, soll $V_{a,b}$ das bedeuten, was aus V wird, im Falle durchgehends a statt x und zugleich b statt y gesetzt werden sollte. Die Bedeutung von $V_{x+h,\, y+h}$ fällt dann sogleich in die Augen, wenn man nur weiß, daß $x+h$ einen Werth von x und $y+h$ einen Werth von y vorstellen soll. — Auch wird diese Bezeichnung jedes mal völlig bestimmt seyn, und nie eine Zweideutigkeit zulassen, wenn man nur immer die Werthe von x von den Werthen von y genau absondert, d. h. sie immer genau als das, was sie seyn sollen, wieder erkennt.

§. 35. Erklärung.

Ist V eine Funktion von x, so kann man, so lange x ganz allgemein gedacht wird, V_{x+h} allemal in eine nach ganzen Potenzen von h fortgehende Reihe verwandeln, von der Form $V+P.h+Q.h^2+R.h^3+\text{etc. etc.}$
wo P, Q, R, etc. im allgemeinen Funktionen von x seyn werden.

Für besondre Werthe von x können jedoch diese Coefficienten P, Q, R, etc. die Form ∞ annehmen, so daß für diese besondern Werthe von x die Funktion V auch nach gebrochenen oder negativen Potenzen oder gar nicht nach Potenzen von h fortgehen kann, wie dies letztere z. B. mit log. (x+h) der Fall ist, für den besondern Werth von x=o.

Den Coefficienten P nun, in so ferne er allemal als eine Funktion von x betrachtet wird, und mit V zugleich bestimmt gegeben ist, bezeichnen wir allemal durch

$$\frac{\partial V}{\partial x}$$

und nennen ihn die (erste) Ableitung von V nach x, oder den ersten Differential- (Quotienten)-Coefficienten. Entwickelt wird solcher durch das Differentiiren oder Ableiten.

Enthielte das V auch noch einen zweiten Veränderlichen x_1, so würde die Bedeutung von V_{x_1+h} und von $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ in die Augen fallen; u. s. w. f.

§. 36. Zusatz.

Ist V eine Funktion von x, x_1, x_2, x_3, etc. so sind $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V}{\partial x_2}$, etc. ebenfalls als Funktionen derselben Veränderlichen x, x_1, x_2, x_3, etc. anzusehen, und es können also von ihnen selbst wieder die Ableitungen nach x, oder x_1, oder x_2, etc. etc. genommen werden u. s. w. f. — Diese Ableitungen nennen wir die zweiten, und bezeichnen sie durch $\frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \cdot \partial x_1}$, etc. etc. etc.

Es erhellet nun auch die Bedeutung von

$$\frac{\partial^{m+n+p} V}{\partial x^m \cdot \partial x_1{}^n \cdot \partial x_2{}^p},$$

welches eine Ableitung der $m+n+p^{ten}$ Ordnung ist, und zwar zuerst m mal nach x genommen, dann n mal nach x_1 und zuletzt p mal nach x_2; — u. s. w. f.

Die Funktion V selbst heißt im Gegensatz ihrer Ableitungen die Urfunktion.

Enthält die Funktion V nur einen einzigen Veränderlichen x, so werden wir uns erlauben, bloß ∂V statt $\frac{\partial V}{\partial x}$ und bloß $\partial^m V$ statt $\frac{\partial^m V}{\partial x^m}$ zu schreiben.

Anmerkung. Wir bitten aber besonders wohl zu bemerken, daß im Allgemeinen, die Urfunktion und alle ihre Ableitungen als Funktionen genau derselben Veränderlichen angesehen werden müssen.

§. 37. Der einfache Taylorsche Lehrsatz.

Es ist allemal:

$$V_{x+h} = V + \partial V \,.\, h + \partial^2 V \,.\, \frac{h^2}{2!} + \partial^3 V \,.\, \frac{h^3}{3!} + \text{etc. etc.}$$

oder

$$V_{x+h} = S \,.\, \left[\partial^a V \,.\, \frac{h^a}{a!}\right]$$

wenn unter $\partial^0 V$, die Urfunktion V selbst verstanden wird, welches zugleich hier für die Folge bemerkt werden mag.

§. 38. Der Maclaurinsche Lehrsatz.

Setzt man in (§. 37.) o statt x, und dann x statt h, so hat man, nach (§. 34.):

$$V = V_0 + (\partial V)_0 \,.\, x + (\partial^2 V)_0 \,.\, \frac{x^2}{2!} + (\partial^3 V)_0 \,.\, \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

oder

$$V = S \,.\, \left[(\partial^a V)_0 \,.\, \frac{x^a}{a!}\right]$$

Anmerkung. Es kann sich aber für besondre Funktionen V treffen, daß einer der Coefficienten V_0, $(\partial V)_0$, $(\partial^2 V)_0$, etc. etc., oder mehrere derselben, die Form ∞ annehmen. Solches zeigt denn an, daß diese besondre Funktion von x, nicht nach ganzen Potenzen von x entwickelt werden kann, also entweder in ihrer Entwickelung auch gebrochene oder negative Potenzen von x enthält, oder gar nicht nach Potenzen von x fortgeht. (Vergl. §. 35.)

§. 39. Der Taylorsche Lehrsatz für zwei Veränderliche.

Ist V eine Funktion von x und x_1, und setzt man zuerst $x+\varkappa m$ statt x, dann auch $x_1+\varkappa m_1$ statt x_1, so erhält man, (§. 37.) zweimal anwendend, augenblicklich

$$V_{x+\varkappa m, x_1+\varkappa m_1} = S.\left[\frac{\partial^{a+b} V}{\partial x^a . \partial x_1^b} . \frac{m^a . m_1^b}{a!\, b!} \varkappa^{a+b}\right]$$

oder

$$= S.\left[\frac{\partial^{a+b} V}{\partial x^a . \partial x_1^b} . \frac{m^a . m_1^b}{a!\, b!} \varkappa^{p}\right]$$
$$a+b=p$$

Anmerkung. Man kann dabei bemerken, daß hier in dem Coefficienten von $\frac{\varkappa^p}{p!}$, die Zahlen-Coefficienten der einzelnen Glieder seyn würden $\frac{p!}{a!\,b!}$ d. h. $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$ d. h. die Binomial-Coefficienten. (Vergl. §. 31.)

§. 40. Der Taylorsche Lehrsatz für beliebig viel Veränderliche.

Enthält V beliebig die Veränderlichen x, x_1, x_2, etc. etc. so hat man nun leicht:

$$V_{x+\varkappa m, x_1+\varkappa m_1, x_2+\varkappa m_2, \text{etc. etc.}} =$$

$$S.\left[\frac{\partial^{a+b+c+\ldots} V}{\partial x^a . \partial x_1^b . \partial x_2^c \ldots} . \frac{m^a . m_1^b . m_2^c \ldots}{a!\, b!\, c! \ldots} \varkappa^{p}\right]$$
$$a+b+c+\ldots = p.$$

§. 41. Lehrsatz.

Wenn eine Funktion V von x, für einen besondern Werth von x nicht selbst die Form ∞ annimmt, so hat

$$V_{x+h} - V$$

einen bestimmten Werth, der für h=o in Null übergeht. Deshalb muß diese Differenz $V_{x+h} - V$, also dann auch V_{x+h} selbst, allemal nach steigenden positiven Potenzen von

h entwickelt werden können, wenn auch vielleicht gebrochene darunter vorkommen sollten.

Wenn nun diese Entwicklung von V_{x+h}, (für diesen besondern Werth von x) wirklich gebrochene Potenzen von h enthält, und $\varkappa^{\alpha}$ die erste derselben ist, dabei $\alpha = \lambda + \frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ ein echter Bruch (also λ die größte in α enthaltene ganze Zahl) so sind die Glieder dieser Entwicklung von V_{x+h}, genau die der Taylorschen Reihe (§. 37.) bis zu dem Gliede, welches $\varkappa^{\lambda}$ enthält (inclusive); und keine der Ableitungen ∂V, $\partial^2 V$, $\partial^3 V, \ldots . \partial^{\lambda} V$ kann für diesen Werth von x die Form ∞ annehmen (wenn sie auch zum Theil oder alle, Null werden können), während alle nach $\partial^{\lambda} V$ folgenden Ableitungen, nehmlich $\partial^{\lambda+1} V$, $\partial^{\lambda+2} V$, etc. etc. bis in's unendliche, für diesen Werth von x nothwendig die Form ∞ erhalten.

Dieser sehr wichtige Satz gilt auch umgekehrt. Der Beweis ergiebt sich leicht, wenn man die Entwicklung von V_{x+h} nach beliebigen (ganzen oder gebrochenen) steigenden Potenzen von h, mit noch unbestimmten Coefficienten annimmt, und links hinter einander nach x, rechts dagegen nach h differentiirt und dabei bemerkt, daß

$$\left(\frac{\partial^m . V_{x+h}}{\partial x^m}\right)_0 = \left(\frac{\partial^m . V_{x+h}}{\partial h^m}\right)_0 = \frac{\partial^m . V_x}{\partial x^m}$$

ist, unter der Voraussetzung, daß o (Null) ein Werth von h seyn soll. (§. 34.). (Vergl. La grange leç. sur le Calcul des fonct. 1806. Leç. VIII.)

§. 42. Zusatz.

Wenn also für $x = a$, der Ausdruck V_{a+h} nach steigenden positiven Potenzen von h entwickelt wird, und wenn man erhält

$$V_{a+h} = V_a + P . h^{\mu} + Q . h^{\nu} + \text{etc. etc. etc.};$$

wenn ferner dann $\mu < 1$ ist, so ist schon $(\partial V)_a = \infty$; für

$\mu = 1$ folgt $(\partial V)_a = P$; und sollte $\mu > 1$ seyn, so muß nothwendig $(\partial V)_a = o$ seyn.

§. 43. Zusatz.

Der Satz (§. 41.) läßt sich aber augenblicklich auf die Maclaurinsche Reihe anwenden. Ist nehmlich V eine Funktion von x, die für $x = o$ nicht ∞ wird, so läßt sich V allemal nach positiven steigenden Potenzen von x entwickeln; und wenn $x^{\lambda + \frac{\mu}{\nu}}$ die erste gebrochene Potenz von x ist in dieser Entwicklung, so sind die Glieder dieser Entwicklung genau mit denen der Maclaurinschen Reihe (§. 38.) übereinstimmend, bis zu demjenigen, welches x^λ enthält (inclusive). Die Ableitungen $(\partial V)_o$, $(\partial^2 V)_o$, ... nebst $(\partial^\lambda V)_o$ (nach x genommen, und zuletzt in jeder einzelnen o statt x gesetzt) können nie die Form ∞ annehmen, während alle folgenden $(\partial^{\lambda+1} V)_o$, $(\partial^{\lambda+2} V)_o$, etc. etc. diese Form ∞ nothwendig annehmen müssen.

Und ist

$$V = V_o + P . x^\mu + Q . x^\nu + \text{etc.}, \text{ so ist}$$

$$(\partial V)_o = \infty, = o, \text{ oder } = P, \text{ je nachdem}$$

$$\mu < 1 \text{ oder} > 1 \text{ oder } = 1 \text{ ist.}$$

§. 44. Erklärung.

Wenn V eine Funktion ist von x und y, y_1, y_2, y_3, etc. etc., welche letztere aber alle selbst wieder beliebige Funktionen von x seyn sollen, so mögen

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial^m V}{\partial x^m}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^n V}{\partial y^n}, \frac{\partial V}{\partial y_2}, \frac{\partial^p V}{\partial y_2{}^p}, \text{ etc. etc.}$$

die Ableitungen bezeichnen in dem Sinne der (§. §. 35. 36.), so nehmlich genommen, als wenn x, y, y_1, y_2, etc. etc. alle ganz und völlig von einander unabhängig wären; während $\dfrac{\partial V}{\underline{\underline{\partial x}}}$, $\dfrac{\partial^m V}{\underline{\underline{\partial x^m}}}$, etc., die Ableitungen bedeuten sollen, die unter der Voraussetzung erhalten werden, daß

man in V vorher erst statt y, y_1, y_2, etc. die durch sie vorgestellten Funktionen von x wirklich substituirt und dadurch V in eine bloße unmittelbare Funktion von x verwandelt, und von dieser letztern nun die Ableitungen nach allem x nimmt, sowohl nach dem, was vorher schon explicit vorkam, als auch nach dem was in y, y_1, y_2 etc. (also implicit) enthalten ist.

Aehnliche Bedeutungen sollen die Zeichen

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \text{ etc. } \frac{\partial^m V}{\partial x^m}, \frac{\partial^{m+n} V}{\partial x^m . \partial x_1{}^n}, \frac{\partial^{m+n+p} V}{\partial x^m . \partial x_1{}^n . \partial x_2{}^p}, \text{etc. etc.}$$

haben, unter der Voraussetzung, daß V eine Funktion von x, x_1, x_2, etc. etc., und y, y_1, y_2, etc. etc. etc. ist, und dabei die letztern Veränderlichen selbst wieder Funktionen von x, x_1, x_2, etc. seyn sollten.

So oft aber in V bloß ein einziger absolut unabhängig Veränderlicher x vorkommt, und also y, y_1, etc. etc. bloße Funktionen dieses x sind, so werden wir auch immer bloß ∂V statt $\frac{\partial V}{\partial x}$ und bloß $\partial^m V$ statt $\frac{\partial^m V}{\partial x^m}$ setzen.

§. 45. Sätze.

Ist V eine Funktion von x, x_1, x_2, etc. und y, y_1, y_2, etc. etc. etc., und sind diese letztern Veränderlichen selbst wieder Funktionen der erstern, so ist allemal

$$1) \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x} + \ldots$$

$$2) \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots$$

u. s. w. f.

Bedenkt man nun, daß $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$, etc., eben solche Funktionen sind, wie V selbst (nehmlich genau von denselben Veränderlichen) und daß $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y_1}{\partial x}$, etc., $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ etc. etc. etc., eben solche Funktionen sind, wie y, y_1, y_2, etc. selbst, so er-

hält man aus (1.) und (2.) leicht, wenn man auf's neue differentiirt:

$$3)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x} + \text{etc. etc.}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x} + \text{etc. etc.}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\cdot\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\cdot\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2 + \text{etc. etc.}$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \text{etc. etc.}$$

$$4)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial x_1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \text{etc. etc.}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \cdot \partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_1}\cdot\frac{\partial y}{dx}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \cdot \partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \cdot \partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \cdot \partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \text{etc.}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial^2 y_1}{\partial x \cdot \partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial x \cdot \partial x_1} + \text{etc. etc;}$$

u. s. w. f.

Anmerkung 1. Man kann leicht $\frac{\partial^n V}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n V}{\partial x^{n-p} \cdot \partial x_1^p}$, etc. ganz allgemein entwickeln, wie hier $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial x_1}$, etc. entwickelt worden ist. — Nach dem Taylorschen Lehrsatz (§. 37.) ist nehmlich $\frac{\partial^n V}{\partial x^n}$ nichts weiter als der Coefficient von $\frac{x^n}{n!}$ in der Entwicklung von $(V)_{x+x}$, wenn nehmlich die Klammern um V andeuten, daß sowohl statt der x die explicit vorkommen, als auch statt der in y, y_1, y_2, etc. enthaltenen, durchgehends $x+x$ geschrieben wird. — So wie aber x in $x+x$ übergeht, geht y in y_{x+x}, y_1 in $(y_1)_{x+x}$, etc. etc. über, während nach dem Taylorschen Lehrsatze (§. 37.):

$$y_{x+x} = y + \partial y \cdot x + \frac{\partial^2 y}{2!}\cdot x^2 + \frac{\partial^3 y}{3!}\cdot x^3 + \ldots = y + \triangle y \cdot x$$

$$(y_1)_{x+x} = y_1 + \partial y_1 \cdot x + \frac{\partial^2 y_1}{2!}\cdot x^2 + \frac{\partial^3 y_1}{3!}\cdot x^3 + \ldots = y_1 + \triangle y_1 \cdot x$$

u. s. w. seyn muß, wo die Bedeutung von $\triangle y$, $\triangle y_1$, etc. in die Augen fällt. — Dann ist

$(V)_{x+\varkappa} = V_{x+\varkappa,\ y+\Delta y.\varkappa,\ y_1+\Delta y_1.\varkappa,\ \text{etc.}}$. — Entwickelt man daher diesen Ausdruck rechts nach dem Taylorschen Lehrsatze für beliebig viel Veränderliche (§. 40.), setzt für $\triangle y$, $\triangle y_1$ etc. die nach $\varkappa$ fortgehenden unendlichen Reihen, die sie vorstellen, wendet nachgehends die Formel (§. 32.) an, ordnet das ganze nach $\varkappa$ und nimmt zuletzt den Coefficienten von $\frac{\varkappa^n}{n!}$, so hat man $\frac{\partial^n V}{\partial x^n}$. — Eben so allgemein konnte $\frac{\partial^n V}{\partial x^{n-p} \partial x_1{}^p}$ auf demselben Wege entwickelt werden. Die Art solche allgemeine Untersuchungen bequemer durchzuführen, wird eben aus dem Anhange noch etwas näher hervorgehen.

Anmerkung 2. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß die Entwicklungen in dem vorstehenden Paragraphen gelten, wenn einige der folgenden Funktionen y_1, y_4 etc. durch z, z_1, etc. vorgestellt, und auch wenn y_1, y_2 etc. etc. Ableitungen von y nach x genommen, seyn sollten.

Anmerkung 3. Es ist aber der vorstehende Paragraph allein hinreichend, um in der Folge alle ersten und zweiten Variationen bequem hinschreiben zu können.

§. 46. Erklärung.

Unter Integral (Zurückleitung) einer Funktion V von x nach x genommen, versteht man jede Funktion U, deren Ableitung nach x, V giebt, so daß also $\frac{\partial U}{\partial x} = V$ oder $\partial U = V$ ist. Man bezeichnet solches Integral U durch $\int V . \partial x$ oder auch durch $\frac{\partial^{-1} V}{\partial x^{-1}}$.

Ist U ein Integral von V nach x genommen, so ist auch $U + C$ ein solches, sobald C von x unabhängig (nach x constant) ist; es giebt also unendlich viele Integrale von V, die jedoch alle nur durch einen nach x constanten Ausdruck von einander verschieden sind.

Ist U eine völlig bestimmte Funktion von x, die keinen nach x constanten Ausdruck enthält, der nicht auch in V vor-

käme, so enthält $U+C$, wo C ein ganz willkührlicher und allgemeiner, nach x constanter Ausdruck ist, alle möglichen Integrale von V, und heißt daher das allgemeine Integral, welches in das besondere Integral U oder $U+c$ übergeht, wenn man der allgemeinen Constante C den Werth Null oder irgend einen andern bestimmten (nicht mehr allgemeinen) Werth c giebt.

§. 47. Zusatz.

Sind U und U' zwei besondre Integrale von V, so hat man, da sie nur um einen nach x constanten Ausdruck c von einander verschieden seyn können, welcher derselbe bleibt, wenn man auch a statt x setzt,

erstlich $U=U'+c$ oder $U_x=U'_x+c$;

dann aber auch $U_a=U'_a+c$;

folglich wenn man subtrahirt, noch $U_x-U_a=U'_x-U'_a$;

und wenn man in dieser Gleichung durchgehends b statt x setzt, auch noch

$$U_b-U_a=U'_b-U'_a.$$

Wenn also auch U und U' zwei verschiedene besondre Integrale von V sind, so sind die Differenzen U_x-U_a und $U'_x-U'_a$, eben so auch die Differenzen U_b-U_a und $U'_b-U'_a$ doch allemal einander gleich. *)

§. 48. Erklärung.

Man bemerke nun wohl nachstehende so häufig vorkom-

*) Man mag bemerken, daß weil U_a ein Ausdruck ist, der x gar nicht mehr enthält, die Differenz U_x-U_a oder $U-U_a$ mit $U+C$ zusammenfällt, wenn der Constante C der Werth $-U_a$ gegeben wird. Es ist also U_x-U_a eben so wie U_x oder U, ein besonders Integral, und zwar dasjenige, welches für $x=a$ in U_a-U_a d. h. in Null übergeht. — Man konnte sich direkt vornehmen, in dem allgemeinen Integral $U+C$ die Constante C so zu bestimmen, daß solches für $x=a$ der Null gleich wird. Dann hatte man $U_a+C=0$ oder $C=-U_a$ und $U+C=U-U_a$.

mende Redensarten. Wenn man nehmlich sagt: „ein Integral fange mit $x=a$ an" oder „das Integral sey von $x=a$ an genommen" so versteht man nichts anders darunter, als die in dem allgemeinen Integral enthaltene willkührliche Constante werde so bestimmt, daß das Integral für $x=a$ der Null gleich wird. — Ist also U ein besondres Integral von V, so ist $U_x - U_a$ dasjenige besondre Integral von V, welches mit $x=a$ anfängt. — Wenn man aber sagt: „ein Integral soll von $x=a$ bis $x=b$ genommen werden", oder „das Integral soll mit $x=a$ anfangen und mit $x=b$ aufhören", oder „das Integral soll zwischen den beiden Grenzen (oder Grenzwerthen von x) a und b genommen werden", so versteht man darunter, man soll erstlich die allgemeine Constante C so bestimmen, daß das Integral für $x=a$, Null wird; zweitens soll man dann in diesem so gebildeten besonderen Integrale überall b statt x setzen. — Ist also U irgend ein besonderes Integral, so ist

$U_b - U_a$ das zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommene, oder das Integral, welches mit $x=a$ anfängt und mit $x=b$ aufhört, oder welches von $x=a$ bis $x=b$ genommen ist. — Den letztern Ausdruck $U_b - U_a$, welcher gar nicht mehr x enthält, nennt man ein bestimmtes Integral, während jedes andere dagegen, wie z. B. $U_x - U_a$, oder U_x selbst oder $U_x + C$, welches noch x enthält, ein unbestimmtes genannt wird.

Jedes unbestimmte Integral einer Funktion V von x, ist also selbst noch immer eine Funktion von x; das bestimmte Integral dagegen ist allemal nach x constant.

§. 49. Erklärung.

In der Folge werden wir, wenn U eine ganz beliebige Funktion von x ist, und a als ein Werth von x genommen wird,

durch $U_{x \div a}$ die Differenz $U_x - U_a$,
so wie durch $U_{b \div a}$ die Differenz $U_b - U_a$
vorstellen.

Ist also U irgend ein besondres Integral von V, so wird $U_{x \div a}$ das mit $x = a$ anfangende besondre Integral von V vorstellen, welches noch immer eine solche Funktion von x ist, daß $\frac{\partial . U_{x \div a}}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = V$ wird. Dagegen wird $U_{b \div a}$ das mit $x = a$ anfangende und mit $x = b$ aufhörende bestimmte Integral $U_b - U_a$ vorstellen.

Bezeichnet $\int V \partial x$ das allgemeine Integral, so ist also $(\int V \partial x)_{x \div a}$ das besondre mit $x = a$ anfangende aber noch unbestimmte, dagegen $(\int V \partial x)_{b \div a}$ das bestimmte von $x = a$ bis $x = b$ genommene Integral.

Wir werden aber in der Folge öfter

$\int_{x \div a} V \partial x$ statt $(\int V \partial x)_{x \div a}$

und $\int_{b \div a} V \partial x$ statt $(\int V \partial x)_{b \div a}$ schreiben, weil dies vielleicht zur Erleichterung der Uebersicht der Formeln beitragen wird.

Anmerkung. Bei dem Allen ist nicht zu übersehen, daß die Grenzwerthe von x, nehmlich a und b, selbst noch Funktionen anderer von x unabhängiger Veränderlichen seyn können.

§. 50. Lehrsatz.

Das bestimmte Integral $\int_{b \div a} V . \partial x$ oder $(\int V . \partial x)_{b \div a}$ ist nothwendig $\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}$, je nachdem, während $b > a$ ist, V für jeden möglichen Werth von x zwischen a und b (so wie V_a und V_b selbst) allemal $\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}$ ist.

Beweis-Andeutung. Denn, ist $U = \int V \partial x$, also $\partial U = V$, so hat man nach dem Taylorschen Lehrsatze (§. 37.) $U_{x+h} - U_x$ desto näher $= \partial U . h$ oder $= V . h$, je kleiner man sich h denkt; folglich, je kleiner man sich h denkt, desto

richtiger, indem man statt x zuerst a, dann a+h, dann a+2h, etc. etc. etc. schreibt:

$$U_{a+h} - U_a = V_a \,.\, h,$$
$$U_{a+2h} - U_{a+h} = V_{a+h} \,.\, h,$$
$$U_{a+3h} - U_{a+2h} = V_{a+2h} \,.\, h, \text{ u. s. f.; zuletzt}$$
$$U_b - U_{a+(n-1)h} = V_{a+(n-1)h} \,.\, h,$$

wenn $b-a=nh$ gesetzt und dabei n beliebig groß und ganz gedacht ist; folglich, indem man addirt, je kleiner h gedacht ist, desto richtiger

$$U_b - U_a = (V_a + V_{a+h} + V_{a+2h} + V_{a+3h} + \ldots + V_{a+(n-1)h}) \,.\, h.$$

Anmerkung. Es erhellet zugleich, daß der Satz noch gelten würde, wenn einige der Werthe von V für x zwischen a und b, Null werden sollten.

§. 51. Zusatz.

Weil allemal $-\int_{a\div b} V\partial x = \int_{b\div a} V\partial x$, so ist, im Falle $b<a$ seyn sollte, $\int_{b\div a} V\partial x$ nothwendig $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$, wenn V für jeden Werth von x zwischen a und b, allemal $\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}$ werden sollte.

Anmerkung. Daß V für keinen der Werthe von x zwischen a und b, die Form ∞ annehmen darf, braucht nicht besonders hinzugefügt zu werden, da die Form ∞ weder positiv noch negativ genannt werden kann, folglich dann der Bedingung der Sätze (§. §. 50 und 51.) nicht genügt ist.

§. 52. Lehrsatz.

Ist V eine Funktion mehrer Veränderlichen x, x_1, x_2, etc. etc., so ist, wenn man davon die m^{te} Ableitung nach x, dann davon die n^{te} Ableitung nach x_1, und davon wiederum die p^{te} Ableitung nach x_2, etc. nehmen soll, es völlig einerlei für das Resultat, in welcher Ordnung die Ableitungen auf einander folgen mögen; d. h. es ist

$$\frac{\partial^{m+n}V}{\partial x^m \,.\, \partial x_1{}^n} = \frac{\partial^{n+m}V}{\partial x_1{}^n \,.\, \partial x^m},$$

$$\frac{\partial^{m+n+p}V}{\partial x^m \,.\, \partial x_1{}^n \,.\, \partial x_2{}^p} = \frac{\partial^{m+p+n}V}{\partial x^m \,.\, \partial x_2{}^p \,.\, \partial x_1{}^n} = \frac{\partial^{n+p+m}V}{\partial x_1{}^n \,.\, \partial x_2{}^p \,.\, \partial x^m} = \text{etc. etc.}$$

käme, so enthält $U+C$, wo C ein ganz willkührlicher und allgemeiner, nach x constanter Ausdruck ist, alle möglichen Integrale von V, und heißt daher das allgemeine Integral, welches in das besondere Integral U oder $U+c$ übergeht, wenn man der allgemeinen Constante C den Werth Null oder irgend einen andern bestimmten (nicht mehr allgemeinen) Werth c giebt.

§. 47. Zusatz.

Sind U und U' zwei besondre Integrale von V, so hat man, da sie nur um einen nach x constanten Ausdruck c von einander verschieden seyn können, welcher derselbe bleibt, wenn man auch a statt x setzt,

erstlich $U=U'+c$ oder $U_x=U'_x+c$;

dann aber auch $U_a=U'_a+c$;

folglich wenn man subtrahirt, noch $U_x-U_a=U'_x-U'_a$;

und wenn man in dieser Gleichung durchgehends b statt x setzt, auch noch

$$U_b-U_a=U'_b-U'_a.$$

Wenn also auch U und U' zwei verschiedene besondre Integrale von V sind, so sind die Differenzen U_x-U_a und $U'_x-U'_a$, eben so auch die Differenzen U_b-U_a und $U'_b-U'_a$ doch allemal einander gleich. *)

§. 48. Erklärung.

Man bemerke nun wohl nachstehende so häufig vorkom-

*) Man mag bemerken, daß weil U_a ein Ausdruck ist, der x gar nicht mehr enthält, die Differenz U_x-U_a oder $U-U_a$ mit $U+C$ zusammenfällt, wenn der Constante C der Werth $-U_a$ gegeben wird. Es ist also U_x-U_a eben so wie U_x oder U, ein besonders Integral, und zwar dasjenige, welches für $x=a$ in U_a-U_a d. h. in Null übergeht. — Man konnte sich direkt vornehmen, in dem allgemeinen Integral $U+C$ die Constante C so zu bestimmen, daß solches für $x=a$ der Null gleich wird. Dann hatte man $U_a+C=0$ oder $C=-U_a$ und $U+C=U-U_a$.

$$\frac{\partial \cdot \int_{b\div a} V\partial x}{\partial x_1} = \int_{b\div a}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right).\partial x,$$

$$\frac{\partial^m \cdot \int_{b\div a} V\partial x}{\partial x_1{}^m} = \int_{b\div a}\left(\frac{\partial^m V}{\partial x_1{}^m}\right).\partial x,$$

wenn nur b eben so wie vorher x, von x_1 unabhängig ist.

§. 55. Zusatz.

Es ist leicht auf dieselbe Weise zu zeigen, daß wenn V eine beliebige Funktion mehrer absolut Veränderlichen x, x_1, x_2, x_3, etc. ist, dann seyn müsse, z. B.

$$\int_{x\div a}\frac{\partial^{m+n+p}V}{\partial x_1{}^m.\partial x_2{}^n.\partial x_3{}^p}\partial x = \frac{\partial^{m+n+p}(\int_{x\div a}V\partial x)}{\partial x_1{}^m.\partial x_2{}^n.\partial x_3{}^p} =$$

$$= \frac{\partial^m\left(\int_{x\div a}\frac{\partial^{n+p}V}{\partial x_2{}^n.\partial x_3{}^p}.\partial x\right)}{\partial x_1{}^m} = \frac{\partial^{p+m}\left(\int_{x\div a}\frac{\partial^n V}{\partial x_2{}^n}.\partial x\right)}{\partial x_3{}^p.\partial x_1{}^m} = \text{etc. etc. etc.}$$

wenn nur a jedesmal von denjenigen Veränderlichen unabhängig ist, nach denen das Integral selbst noch differentiirt werden soll. — Auch verbleiben diese Identitäten noch richtig, wenn man durchgehends (versteht sich in den Endresultaten, also nicht in den Ausdrücken, welche noch integrirt werden sollen, sondern erst in denen nach der Integration erhaltenen, also hier unten in den Zeigern $(x\div a)$) b statt x schreibt, wenn nur b eben so wie x, von den übrigen Veränderlichen unabhängig ist, und namentlich von denen, nach welchen das Integral noch differentiirt werden soll.

§. 56. Lehrsatz.

Ist V eine Funktion zweier absolut Veränderlichen x und x_1, so ist allemal

$$\int_{x_1\div a_1}(\int_{x\div a}V\partial x)\partial x_1 = \int_{x\div a}(\int_{x_1-a_1}V.\partial x_1).\partial x,$$

wenn nur a und a_1 von x_1 und x unabhängig sind.

Beweis. Denn es sey $\int V.\partial x = U$ und $\int U.\partial x_1 = W$, so ist
$$\int_{x\div a}V.\partial x = U_x - U_a,$$
und

1) $$\int_{x_1\div a_1}(\int_{x\div a}V.\partial x)\partial x_1 = \int_{x_1-a_1}U.\partial x_1 - \int_{x_1\div a_1}U_a.\partial x_1$$
$$= (W_{x_1} - W_{a_1} - [(W_a)_{x_1} - (W_a)_{a_1}],$$

wo man nicht vergessen darf, daß a ein Werth von x und a_1 ein Werth von x_1 seyn soll, daß V mit V_{x,x_1}, U mit U_{x,x_1}, W mit W_{x,x_1}, also auch W_{x_1} mit W_{x,x_1}, und W_{a_1} mit W_{x,a_1}; ferner $(W_a)_{x_1}$ mit W_{a,x_1} und $(W_a)_{a_1}$ mit W_{a,a_1} als völlig gleichbedeutend angesehen wird, so daß das Endresultat in (1.) auch so

$W_{x,x_1} - W_{x,a_1} - W_{a,x_1} + W_{a,a_1}$ geschrieben werden kann. — Nun ist aber:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = V \text{ und } \frac{\partial W}{\partial x_1} = U, \text{ also auch } V = \frac{\partial^2 W}{\partial x . \partial x_1}$$

und $\int_{x_1 \div a_1} V \partial x_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{a_1} = \frac{\partial . (W_{x_1} - W_{a_1})}{\partial x}$,

immer weil x_1 und a_1 von x ganz unabhängig sind.

Also auch

$$2) \int_{x \div a} (\int_{x_1 \div a_1} V . \partial x_1) . \partial x = (W_{x_1} - W_{a_1})_x - (W_{x_1} - W_{a_1})_a$$
$$= W_{x,x_1} - W_{x,a_1} - W_{a,x_1} + W_{a,a_1};$$

folglich aus (1) und (2) etc. etc.

§. 57. Zusatz.

Ferner ist, wenn V eine Funktion mehrer absolut Veränderlichen, noch

$$\frac{\partial . \int\int V . \partial x . \partial x_1}{\partial x_2} = \int\int . \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) . \partial x . \partial x_1,$$

wenn nur die Grenzwerthe, zwischen denen die Integrale genommen werden sollen, von x_2 unabhängig sind. — So lange man die Ordnung der beiden Integrationen selbst nicht verwechselt, so lange können die Grenzwerthe, zwischen denen die Integration nach x genommen werden soll, noch recht füglich auch Funktionen des andern Veränderlichen x_1 seyn.

§. 58. Erklärung.

In so ferne V eine Funktion von x ist, wird $\int V \partial x$ und $\int_{x \div a} V \partial x$ ebenfalls eine Funktion von x seyn, daher von letzterer wiederum das Integral genommen werden können.

Diese neue Funktion von x nennt man das zweite Integral von V nach x genommen, und bezeichnet es

durch $\int^2 V \cdot \partial x^2$, in so ferne beide Integrationen allgemein sind,

durch $\int^2_{x+a} V \cdot \partial x^2$ dagegen, in so ferne beide mit $x=a$ anfangen sollen,

endlich durch $\int_{x+a_1} \int_{x+a} V \cdot \partial x^2$, in so ferne das erste mit $x=a$ das andere aber mit $x=a_1$ anfangen soll.

Statt $\int^2 V \cdot \partial x^2$ könnte man auch $\frac{\partial^{-2} V}{\partial x^{-2}}$ schreiben.

Eben so einleuchtend ist nun auch die Bezeichnung

$\int^n V \cdot \partial x^n$ oder $\frac{\partial^{-n} V}{\partial x^{-n}}$, und $\int^n_{x+a} V \cdot dx^n$.

Aber eben so nennt man auch schon die Funktion W in dem Beweise des (§. 57.) das zweite Integral von V einmal nach x, das anderemal nach x_1 genommen; und sind die Grenzen a und a_1, von welcher jede Integration anfangen soll, von einander und von x_1 und x ganz unabhängig, so kann man dies zweite Integral auch durch

$$(\int^2 V \partial x \cdot \partial x_1)_{x+a,\, x_1+a_1}$$

bezeichnen, in so ferne wir überhaupt durch $W_{x+a,\, x_1+a_1}$ den Ausdruck $$W_{x,x_1} - W_{x,a_1} - W_{a,x_1} + W_{a,a_1}$$ vorstellen lassen wollen, wenn W eine ganz beliebige Funktion von x und x_1 ist.

§. 59. Zusatz.

Dem Vorhergehenden zu Folge ist es nun aber leicht zu beweisen, daß die Sätze des (§. 52.) auch dann noch gelten, wenn m, n, p, etc. beliebige positive oder negative Zahlen bedeuten, wenn nur in dem letztern Falle die angezeigten Integrationen in derselben Ordnung mit denselben Grenzwerthen ihrer Veränderlichen anfangen, und diese Anfangsgrenzwerthe von denjenigen Veränderlichen unabhängig sind, nach welchen die Integrale selbst nachher noch differentiirt werden sollen.

§. 60. Lehrsatz.

Sind u und v Funktionen von x, so ist

1) $\partial(uv) = u\partial v + v\partial u$,

2) $\int(u\partial v) = uv - \int v\partial u + C$,

wo C ein allgemeiner nach x constanter Ausdruck seyn soll; und 3) $\int_{x+a}(u\partial v) = (uv)_{x+a} - \int_{x+a}(v\partial u)$,

wo ∂v und ∂u statt $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ stehen, und wo $\int(u\partial v)$ statt $\int(u\partial v).\partial x$ steht, indem man stillschweigend voraussetzt, daß die Differentiationen sowohl, als auch die Integrationen alle, nach dem Urveränderlichen x genommen seyn sollen.

Beweis. Die Formel (1.) ist bekannt. Die Formel (2.) geht unmittelbar aus (1.) hervor; und die (3.) erhält man, wenn in (2.) durchgehends a statt x geschrieben (wodurch C unverändert bleibt) und diese neue Gleichung von (2.) selbst subtrahirt wird.

§. 61. Zusatz.

Schreibt man in den Zeigern der Formel (n. 3. §. 60.) b statt x, so erhält man noch

$$\int_{b+a}(u\partial v) = (uv)_{b+a} - \int_{b+a} v\partial u.$$

Nach dieser Formel oder nach den Formeln (§. 60. n. 2. und n. 3.) integriren, heißt theilweise integriren.

§. 62. Zusatz.

Wendet man die Formel (§. 60. n. 2.) zweimal an, so erhält man

$$\int(u\partial^2 v) = (u\partial v) - \int(\partial u.\partial v) + C$$

und $$\int(\partial u.\partial v) = (\partial u)\times v - \int(\partial^2 u)v + C_1;$$

folglich $\int(u.\partial^2 v) = u.\partial v - (\partial u).v + \int v.\partial^2 u + C_2$.

Wendet man aber dieselbe Formel 3mal hintereinander an, so ergiebt sich

$$\int(u.\partial^3 v) = u.\partial^2 v - \partial u.\partial v + (\partial^2 u).v - \int v.\partial^3 u + C;$$

und so fortfahrend, allgemein (§. 30.):

$$1)\int(u.\partial^n v)=\underset{a+b=n-1}{S}.[(-1)^a.\partial^a u.\partial^b v]+(-1)^n\int v.\partial^n u+C$$

$$2)\int_{x+a}(u\partial^n v)=(\underset{a+b=n-1}{S}.[(-1)^a.\partial^a u.\partial^b v])_{x+a}+(-1)^n\int_{x+a}(v.\partial^n u);$$

wo alle Differentiationen und Integrationen nach x genommen sind, und wo man in den Zeigern $(x\div a)$, durchgehends auch b statt x setzen kann, so daß die Integrale nach x zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommen sind.

Differentiirt man aber die Gleichung (1.), so erhält man noch

$$3)\ u.\partial^n v=\partial.\underset{a+b=n-1}{S}.[(-1)^a.\partial^a u.\partial^b v]+(-1)^n v.\partial^n u.$$

§. 63. Zusatz.

Sind u und v beliebige Funktionen von x und x_1, so erhält man hieraus leicht, wenn man die Formel (§. 62. n. 3.) zuerst auf $U\frac{\partial^m.\left(\frac{\partial^n v}{\partial x_1{}^n}\right)}{\partial x^m}$ anwendet (die Ableitungen nach x aber, um Zweideutigkeit zu vermeiden, durch $\underset{x}{\partial}$ bezeichnet), dann die beiden Theile rechts als Funktionen von x_1 betrachtet, und auf jeden von beiden in diesem Sinne dieselbe Formel (§. 62. n. 3.) noch einmal anwendet, ohne weiters:

$$u\frac{\partial^{m+n}v}{\partial x^m.\partial x_1{}^n}=\underset{x,\,x_1}{\partial^2}.\underset{a+b=m-1,\ c+d=n-1}{S}\left[(-1)^{a+c}.\frac{\partial^{a+c}u}{\partial x^a.\partial x_1{}^c}.\frac{\partial^{b+d}v}{\partial x^b.\partial x_1{}^d}\right]$$
$$+\underset{x}{\partial}.\underset{a+b=m-1}{S}\left[(-1)^{a+n}\frac{\partial^{a+n}u}{\partial x^a.\partial x_1{}^n}.\frac{\partial^b v}{\partial x^b}\right]$$
$$+\underset{x_1}{\partial}.\underset{a+b=n-1}{S}\left[(-1)^{a+m}\frac{\partial^{a+m}u}{\partial x_1{}^a.\partial x^m}.\frac{\partial^b v}{\partial x_1{}^b}\right]+(-1)^{m+n}v.\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m.\partial x_1{}^n};$$

wo $\underset{x,\,x_1}{\partial^2}$ die doppelte Ableitung, einmal nach x, das anderemal nach x_1 vorstellt, während $\underset{x_1}{\partial}$ die Ableitung nach x_1 genommen bedeutet.

Anmerkung. Man bedient sich aber des (§. 62)., um, wenn Glieder von der Form $u.\partial^n v$ integrirt werden sollen, das Integral wenigstens so umzuformen, daß unter dem Integralzeichen, wenn auch v selbst

noch, aber doch keine Ableitung von v mehr vorkommt. — Zu einem ähnlichen Gebrauche kann auch die Formel (§. 63.) dienen, wenn von Gliedern von der Form $u.\frac{\partial^{m+n}v}{\partial x^m.\partial x_1{}^n}$ das doppelte Integral genommen werden soll, einmal nach x und das anderemal nach x_1, und dabei alle Ableitungen von v von dem doppelten Integralzeichen befreit werden sollen. — Um endlich zu zeigen, wie in der letzten Formel die einzelnen Glieder entwickelt erscheinen, betrachte man $u\frac{\partial^5 v}{\partial x^2.\partial x_1{}^3}$ als zu verwandeln; so hat man hier $m=2$, $n=3$, und in dem ersten der 4 Theile rechts (in unsrer Formel) sind die Werthe von a, b, c, d, bedingt durch die Gleichungen $a+b=1$ und $c+d=2$ und man erhält daher 6 verschiedene Systeme dieser Werthe, nehmlich

a	0	0	0	1	1	1
b	1	1	1	0	0	0
c	0	1	2	0	1	2
d	2	1	0	2	1	0

und der erste der 4 Theile rechts (in unsrer Formel) wird daher

$$\underset{x,\,x_1}{\partial^2}\left(u.\frac{\partial^3 v}{\partial x.\partial x_1{}^2}-\frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\partial^2 v}{\partial x.\partial x_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}.\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial x_1}.\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial^3 u}{\partial x.\partial x_1{}^2}.v\right).$$

In dem zweiten Theile unsrer Formel rechts, sind die Werthe von a und b bedingt durch die Gleichung $a+b=1$, und man hat daher die beiden Systeme von Werthen $a=0$, $b=1$ oder $a=1$, $b=0$; folglich liefert der zweite Theil bloß

$$\underset{x}{\partial}\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x_1{}^3}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^4 u}{\partial x.\partial x_1{}^3}.v\right).$$

Der dritte liefert, wegen der Gleichung $a+b=2$, folgendes:

$$\underset{x_1}{\partial}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial x_1.\partial x^2}.\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_1{}^2.\partial x^2}.v\right);$$

und der vierte Theil geht in $-v.\frac{\partial^5 u}{\partial x^2.\partial x_1{}^3}$ über, während die Summe aller 4 Theile dem gegebenen Gliede $u\frac{\partial^5 v}{\partial x^2.\partial x_1{}^3}$ gleich seyn muß.

Nimmt man nun hievon links und rechts die doppelten Integrale einmal nach x, das anderemal nach x_1, indem man das erste von a, das zweite aber von a_1 anfangen läßt, während a und a_1 von x_1 und x unabhängig gedacht sind, so erhält man

$$\left(\iint u \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 . \partial x_1^3} . \partial x . \partial x_1\right)_{x \div a,\ x_1 \div a_1} =$$

$$\left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x . \partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} . \frac{\partial^2 v}{\partial x . \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} . \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} . \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial x_1} . \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x . \partial x_1^2} . v\right)_{x \div a,\ x_1 \div a_1}$$

$$+ \int_{x_1 \div a_1}\left(- \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} . \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^4 u}{\partial x . \partial x_1^3}\, v\right)_{x \div a} . \partial x_1$$

$$+ \int_{x \div a}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 . \partial x^2} . \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 . \partial x^2}\, v\right)_{x_1 \div a_1} \partial x$$

$$- \left(\iint \left(v . \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 . \partial x_1^3}\right) . \partial x . \partial x_1\right)_{x \div a,\ x_1 - a_1},$$

wo, wie man sieht, keine Ableitung von v mehr unter dem doppelten Integralzeichen steht.

§. 64. Lehrsatz.

Ist V eine Funktion von x und y, und y selbst wieder eine Funktion von x, so ist allemal

$$\int \frac{\partial V}{\partial x} . \partial x = V - \int \left(\frac{\partial V}{\partial y} \partial y\right) + C$$

wo ∂y statt $\frac{\partial y}{\partial x}$ steht, und wo die Integrale alle nach dem absolut Veränderlichen x genommen seyn sollen.

Beweis. Denn es ist ∂V oder $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} . \partial y$; folglich $\frac{\partial V}{\partial x} = \partial V - \frac{\partial V}{\partial y} . \partial y$, woraus, wenn man integrirt, der Lehrsatz folgt.

Anmerkung. Es enthält aber dieser Satz die Formel (§. 60. n. 2.) als einen besondern Fall in sich. — Auch geht daraus hervor

$$\int_{x \div a} \frac{\partial V}{\partial x} \partial x = V_{x \div a} - \int_{x \div a} \left(\frac{\partial V}{\partial y} . \partial y\right),$$

alle Integrale nach x genommen.

§. 65. Aufgabe.

Es sind $L_0, L_1, L_2, \ldots L_m$ und δy ganz beliebige Funktionen von x und

$$L = L_0 . \delta y + L_1 . \partial \delta y + L_2 . \partial^2 \delta y + L_3 . \partial^3 \delta y + \ldots + L_m . \partial^m \delta y,$$

so wie $W = \int L \partial x$, man soll $W_{x \div a}$ oder $\int_{x \div a} L \partial x$, so um-

wandeln, daß alle Ableitungen von δy außerhalb des Integralzeichens zu stehen kommen.

Auflösung. Man integrire alle einzelnen Glieder von L theilweise, d. h. man wende auf jedes einzelne Glied von L die Formeln der (§. §. 60. und 62.) an, so erreicht man augenblicklich seine Absicht.

Um jedoch die Ausführung zu vereinfachen, schreiben wir lieber nach (§. 30.): $L = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S.}[L_{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}\delta y]$,

und wenden diese Formel (§. 62.) auf das einzige Glied $L_{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}\delta y$ (als den Repräsentanten aller Glieder) an. Setzt man aber in der Formel (§. 62. n. 2.) statt $\frac{u,\ n,\ v,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b}}{\text{beziehlich } L_{\mathfrak{a}},\ \mathfrak{a},\ \delta y,\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}}$

so erhält man

$$W_{x\div e} = \left(\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m,\ \mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{a}-1}{S.}[(-1)^{\mathfrak{c}}.\partial^{\mathfrak{c}}L_{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{d}}\delta y]\right)_{x\div e} + \int_{x\div e}\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S.}[(-1)^{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}L_{\mathfrak{a}}]\delta y.\partial x$$

oder:

$$\odot \quad \int_{x\div e} L\partial x =$$
$$= \left(\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S.}[(-1)^{\mathfrak{c}}.\partial^{\mathfrak{c}}(L_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1}).\partial^{\mathfrak{d}}\delta y]\right)_{x\div e} + \int_{x\div e}\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S.}[(-1)^{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}L_{\mathfrak{a}}]\delta y.\partial x.$$

Anmerkung. Dieser Ausdruck bietet noch überdieß zwei Vortheile dar. Der erste besteht darin, daß die Bedingungsgleichungen $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$ ganz weggelassen werden können, da die erstere nichts weiter bedingt, als daß man statt $\mathfrak{d}$ nach und nach Null und alle möglichen ganzen Zahlen bis $m-1$ setzen, und so oft $\mathfrak{d}$ irgend einen Werth hat, auch noch für $\mathfrak{c}$ Null und jede mögliche ganze Zahl schreiben soll, jedoch mit Ausnahme derjenigen, für welche $\mathfrak{c}+\mathfrak{d}>m-1$ würde, welcher letztere Umstand allein durch $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1$ ausgedrückt ist, da $\mathfrak{b}$ als deutscher Buchstabe (§. 30.) nicht negativ werden darf. So wie man aber $\mathfrak{c}+\mathfrak{d}>m-1$ nehmen wollte, würde $\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1>m$ und $L_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1}=0$, weil L_m der letzte Coefficient in L ist; folglich würden die folgenden Glieder von selbst wegfallen, und die Bedingungsgleichung ist daher völlig überflüssig. Aehnliches gilt von der andern Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$. — Der zweite Vortheil besteht darin, daß in dem ersten Theile des gefundenen Ausdrucks die Glieder desselben bereits nach δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, etc. etc. etc. geordnet erscheinen, in so ferne man sich in $\partial^{\mathfrak{d}}\delta y$ unter $\mathfrak{d}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, etc. etc. gesetzt denkt; eine Form,

die wir in den später folgenden Anwendungen gerade wünschenswerth finden werden. — Dabei mag noch bemerkt seyn, daß die Coefficienten dieser δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$ etc., weil für jeden Werth von $\mathfrak{d}$, das $\mathfrak{c}$ noch nach und nach 0, 1, 2, 3, etc. werden muß, selbst wieder Summen mehrer Glieder, und zwar der Coefficient von $\partial^{\mu}\delta y$ eine Summe von $m-\mu$ Gliedern seyn wird, weil für $\mathfrak{d}=\mu$, $\mathfrak{c}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, bis $m-\mu-1$ werden kann. Für $\mathfrak{d}=m-1$ wird $\mathfrak{c}=0$, und der Coefficient dieses Faktors $\partial^m\delta y$ hat daher nur ein einziges Glied, und ist L_m selbst. Entwickelt man auf diese Weise den Ausdruck

$$\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S.}\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\partial^{\mathfrak{c}}.(L_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1}).\partial^{\mathfrak{d}}\delta y\right],$$

so nimmt er folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}(L_1-\partial.L_2+\partial^2.L_3-\partial^3.L_4+\ldots+(-1)^{m-1}.\partial^{m-1}.L_m)\delta y\\ +(L_2-\partial.L_3+\partial^2.L_4-\ldots+(-1)^{m-2}.\partial^{m-2}.L_m)\partial\delta y\\ +(L_3-\partial.L_4+\ldots+(-1)^{m-3}.\partial^{m-3}.L_m)\partial^2\delta y\\ +(L_4-\ldots+(-1)^{m-4}.\partial^{m-4}.L_m)\partial^3\delta y\\ +\ldots\ldots\\ +L_m.\partial^{m-1}\delta y.\end{aligned}$$

Das andere Aggregat

$$\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S.}\left[(-1)^{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}.L_{\mathfrak{a}}\right]$$

entwickelt, giebt dagegen

$$L_0-\partial.L_1+\partial^2.L_2-\partial^3.L_3+\partial^4.L_4-\ldots+(-1)^m\partial^m.L_m.$$

Indem wir aber hier ein für allemal in das zur Würdigung eines solchen Summen-Ausdrucks (Aggregats) nöthig geglaubte Detail eingegangen sind, erlauben wir uns nur noch die Bemerkung, wie die große Bequemlichkeit solcher Aggregate darinn besteht, daß sie nicht bloße Typen sind, sondern daß der entwickelte Ausdruck im Aggregat gleichsam schon erblickt wird, und ohne alle Mühe jedes Glied, oder jede Reihe (der Coefficient von $\partial^{\mu}\delta y$ z. B.) augenblicklich hingeschrieben werden kann.

§. 66. Zusatz.

Eben so findet man unter denselben Voraussetzungen (§. 65.)

$$(\mathfrak{C})\ W_{b\div a}=\int_{b\div a}L\partial x=$$

$$=\left(\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S.}\left[(-1)^{\mathfrak{c}}.\partial^{\mathfrak{c}}(L_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1}).\partial^{\mathfrak{d}}\delta y\right]\right)_{b\div a}+\int_{b\div a}\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S.}\left[(-1)^{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}.L_{\mathfrak{a}}\right]\delta y.\partial x.$$

§. 67. Zusatz.

Wäre

$$L=\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S.}\left[L_{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}\delta y\right]+\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{S.}\left[M_{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}\delta z\right]$$

gegeben, wo M_0, M_1, M_2, etc. M_n und δz ebenfalls ganz beliebige Funktionen von x seyn sollen, und nun $\int_{x\div a} L\partial x$ in Bezug auf δy und auch in Bezug auf δz auf die ähnliche Form zu bringen, so erhielte man auf demselben Wege für $\int_{x\div a} L\partial x$, außer den (§. 65. ⊙) bereits stehenden Gliedern in Bezug auf δy, auch noch diese beiden

$$\left(\underset{b+c+\mathfrak{d}=n-1}{S}.[(-1)^c.\partial^c(M_{c+\mathfrak{d}+1}).\partial^{\mathfrak{d}}\delta z]\right)_{x\div a} + \int_{x\div a}\underset{a+b=n}{S}.[(-1)^a.\partial^a M_a]\delta z.\partial x,$$

wo man die Bedingungsgleichungen $b+c+\mathfrak{d}=n-1$ und $a+b=n$ auch weglassen kann. — Dieselben beiden Glieder, nur b in den Zeigern statt x gesetzt, würde man auch zu denen in (§. 66. ☾) bereits stehenden noch hinzunehmen müssen, wenn für die hiesige Voraussetzung von L das bestimmte Integral $\int_{b\div a} L\partial x$ ausgedrückt werden sollte.

Aehnliche zu L hinzutretende Theile, wie z. B. $\underset{a+b=p}{S}.[N_a.\partial^a\delta u]$, etc. etc. würden ähnliche Theile in $\int_{x\div a} L\partial x$ noch hervorbringen, nehmlich

$$\left(\underset{b+c+\mathfrak{d}=p-1}{S}.[(-1)^c.\partial^c(N_{c+\mathfrak{d}+1}).\partial^{\mathfrak{d}}\delta u]\right)_{x\div a} + \int_{x\div a} S.[(-1)^a.\partial^a.N_a]\delta u.\partial x,$$

u. s. w. f.

§. 68. Aufgabe.

Es ist genau wie im (§. 65.), $L=L_0.\delta y+L_1.\partial\delta y+\ldots\ldots+L_m.\partial^m\delta y$ und $W=\int L\partial x$; ferner L' noch eine beliebige Funktion von x, und $W'=\int L'.W_{x\div a}.\partial x$ oder $=\int L'(\int_{x\div a} L\partial x).\partial x$ (wofür man auch $W'=\int L'\int_{x\div a} L\partial x^2$ setzen kann, als etwas einfachere Bezeichnung). Man soll $W'_{x\div a_1}$ d. h. $\int_{x\div a_1} L'\int_{x\div a} L\partial x^2$, so umformen, daß alle Ableitungen von δy, vom Integralzeichen befreit, zu stehen kommen.

Auflösung. Weil

1) $\int L\partial x = W$, so ist 2) $\partial W = L$

und 3) $W'_{x\div a_1} = \int_{x\div a_1}(L'.W_{x\div a})\partial x.$

Folglich, wenn man nach (§. 60. n. 2.) theilweise integrirt, $u=W_{x\div a}$ und $v=\int L'\partial x$ setzend, weil $\partial W_{x\div a}=\partial W=L$ (n. 2.) ist,

$$4)\quad W'_{x \div a_1} = \left(\int L'\partial x \times W_{x \div a}\right)_{x \div a_1} - \int_{x \div a_1} (L . \int L'\partial x)\partial x,$$

wo $\int L'\partial x$ mit einem beliebigen Werth von x anfangen kann. Läßt man aber $\int L'\partial x$ für $x = a_1$ der Null gleich werden (d. h. mit $x = a_1$ anfangen), so wird diese Gleichung noch einfacher, nehmlich:

$$5)\quad W'_{x \div a_1} = \int_{x \div a_1} L'\partial x \times W_{x \div a} - \int_{x \div a_1} (L . \int_{x \div a_1} L'\partial x)\partial x.$$

Da nun $\int_{x \div a_1} L'\partial x$ eine bloße Funktion von x wird, die durch J bezeichnet werden kann, so daß man hat $\int_{x \div a_1} L'\partial x = J$, so ist auch:

$$6)\quad W'_{x \div a_1} = J . \int_{x \div a} L\partial x - \int_{x \div a_1} J . L . \partial x.$$

Da nun $\int_{x \div a} L\partial x$ bereits (§. 65.) umgeformt steht, und $\int_{x \div a_1} J . L\partial x$ eben so umgeformt wird, wenn man in dem Ausdruck (§. 65. ⊙) a_1 statt a und $J . L_\alpha$ statt L_α schreibt, für jeden Werth, den α haben kann, so giebt dies:

$$7)\quad W'_{x \div a_1} =$$

$$= \Big(J . \underset{b+c+d=m-1}{S} . [(-1)^c . \partial^c(L_{c+d+1}) . \partial^d \delta y]\Big)_{x \div a} + J . \int_{x \div a} \underset{\alpha+b=m}{S}[(-1)^\alpha . \partial^\alpha L_\alpha]\delta y . \partial x$$

$$- \Big(\underset{b+c+d=m-1}{S} . [(-1)^c . \partial^c(J . L_{c+d+1}) . \partial^d \delta y]\Big)_{x \div a_1} - \int_{x \div a_1} \underset{\alpha+b=m}{S}[(-1)^\alpha . \partial^\alpha(J . L_\alpha)]\delta y . \partial x.$$

§. 69. Zusatz.

Sollte aber, unter übrigens denselben Voraussetzungen wie im vorhergehenden (§. 68.), nicht $W'_{x \div a_1}$ sondern das bestimmte, zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral $W'_{b \div a}$ (während das erste Integral $W_{x \div a}$ unbestimmt bleiben, aber mit demselben Werth $x = a$ anfangen soll) die Umformung erleiden, so würde in der Auflösung des (§. 68.) alles unverändert bleiben, (nur a statt a_1 zu stehen kommen) bis zur Gleichung (4.), welche jetzt werden würde

$$4')\quad W'_{b \div a} = \left(\int L'\partial x \times W_{x \div a}\right)_{b \div a} - \int_{b \div a} (L \int L'\partial x)\partial x,$$

oder, wenn man $\int L'\partial x$ mit $x = a$ anfangen läßt, und als bloße Funktion von x mit J bezeichnet (wie im vorhergehenden §. 68.)

$$5)\ W'_{b\div a} = J_b . W_{b\div a} - \int_{b\div a} JL . \partial x$$
$$= J_b \int_{b\div a} L\partial x - \int_{b\div a} JL . \partial x$$

oder weil J_b nach x constant ist:

$$6)\ W'_{b\div a} = \int_{b\div a} (J_b - J) L\partial x;$$

folglich nach (§. 66.), wenn man $(J_b - J)L_{\mathfrak{a}}$ statt des dortigen $L_{\mathfrak{a}}$ setzt, für jeden Werth den $\mathfrak{a}$ möglicher Weise haben kann,

$$7)\ W'_{b\div a} = \Big(\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S.} [(-1)^{\mathfrak{c}} . \partial^{\mathfrak{c}}[(J_b - J)L_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1}] . \partial^{\mathfrak{d}}\delta y] \Big)_{b\div a}$$
$$+ \int_{b\div a} \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S.} [(-1)^{\mathfrak{a}} . \partial^{\mathfrak{a}} . (J_b - J)L_{\mathfrak{a}}]\delta y . \partial x,$$

welches für diesen einfachern Fall die gesuchte Umformung ist, und aus welchen Ausdrücken zu gleicher Zeit, wenn man will, die Bedingungsgleichungen $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$, weggelassen werden können.

§. 70. Zusatz.

Sollen aber beide Integrale in W' bestimmte seyn, und von $x=a$ bis $x=b$ sich erstrecken, soll also $W'_{b\div a} = \int_{b\div a}(L' \int_{b\div a} L\partial x)$ umgeformt werden, so ist $\int_{b\div a} L\partial x$ nach x constant, und dieser constante Faktor aus dem zweiten Integral-Zeichen herauszusetzen, so daß man hat

$$W'_{b\div a} = \int_{b\div a} L'\partial x \times \int_{b\div a} L\partial x = J_b . \int_{b\div a} L\partial x;$$

und also in diesem Falle das (§. 66. ζ) für $\int_{b\div a} L\partial x$ gefundene Resultat, nur noch mit der Constante J_b zu multipliciren, um für diesen Fall den umgeformten Ausdruck zu haben. *)

*) In der: Analyt. Darstellung der Variationsrechnung etc. etc. Berlin 1823. scheinen (pag. 53. 54. 55.) die beiden hier (§. 69. und §. 70.) behandelten Fälle mit einander verwechselt, oder als nicht von einander verschieden angesehen worden zu seyn. Der allgemeinste hier (§. 68.) behandelte Fall ist übrigens dort nicht in Betrachtung gezogen worden. Gerade dieser Fall kann aber in den Anwendungen am häufigsten vorkommen.

§. 71. Zusatz.

Sollte in den 3 Aufgaben der (§. §. 68. 69 und 70.) das L nicht bloß die Reihe $L_0.\delta y + L_1.\partial\delta y + \ldots + L_m.\partial^m\delta y$, sondern, genau wie im (§. 67.), auch noch die Glieder

$$M_0.\delta z + M_1.\partial\delta z + M_2.\partial^2\delta z + \ldots M_n.\partial^n\delta z$$

und etwa auch noch die Glieder

$$N_0.\delta u + N_1.\partial\delta u + N_2.\partial^2\delta u + \ldots + N_p.\partial^p\delta u$$

u. s. w. f. enthalten, so würden in allen 3 Endresultaten zu den (§. §. 68. 69 und 70.) gefundenen Gliedern in δy, auch noch ganz analoge Glieder in δz, δu, etc. hinzutreten.

§. 72. Aufgabe.

Es haben L und L' und W und W' genau die Bedeutung des (§. 68.) und L'' sey noch eine beliebige Funktion von x, und $W'' = \int L''W'_{x \div a_1}\partial x$ oder $W'' = \int (L''\int_{x \div a_1}(L'\int_{x \div a}L\partial x)\partial x)\partial x$ (oder $= \int L''\int_{x \div a_1}L'\int_{x \div a}L\partial x^3$, als kürzere Bezeichnung). Man soll $W''_{x \div a_2}$ so umformen, daß alle Ableitungen von δy vom Integralzeichen befreit erscheinen. (Vergl. §. 68.).

Auflösung. Nach der Annahme hat man

1) $\int L.\partial x = W$, also 2) $L = \partial W = \partial.W_{x \div a}$

3) $\int L'W_{x \div a}.\partial x = W'$, also 4) $L'W_{x \div a} = \partial W' = \partial.W'_{x \div a_1}$

und 5) $W''_{x \div a_2} = \int_{x \div a_2}L''W'_{x \div a_1}\partial x$;

folglich, indem man $\int_{x \div a_2}L''\partial x$, in so ferne solches eine bloße und bestimmte Funktion von x ist, durch J' bezeichnet, so daß man hat

7) $\int_{x \div a_2}L''.\partial x = J'$ und 8) $L'' = \partial J'$,

und wenn man nach (§. 60. n. 3.) theilweise integrirt, $v = J'$ und $u = W'_{x \div a_1}$ setzend,

9) $W''_{x \div a_2} = (J'.W'_{x \div a_1})_{x \div a_2} - \int_{x \div a_2}J'L'W_{x \div a}.\partial x$;

oder weil nach der Annahme $J'_{a_2} = 0$ wird (n. 7.):

10) $W''_{x \div a_2} = J'.W'_{x \div a_1} - \int_{x \div a_2}J'L'.W_{x \div a}.\partial x$.

Da nun $W'_{x \div a_1}$ in (§. 68.) bereits umgeformt zu finden ist, und $\int_{x \div a_2}J'L'W_{x \div a}.\partial x$ nach demselben (§. 68.) umgeformt erscheint, wenn man a_2 statt des dortigen a_1 und J'L' statt

des dortigen L' schreibt, so darf man nur diese Werthe hier setzen, um die hiesige Aufgabe gelößt zu haben.

§. 73. Zusatz.

Sollen alle Integrale mit $x=a$ anfangen, so darf man nur $a_2=a_1=a$ setzen. Soll aber zugleicher Zeit das letzte Integral (allein) zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommen (also völlig bestimmt) seyn, während die übrigen Integrale alle noch unbestimmt bleiben, also jedes für sich noch eine Funktion von x seyn soll, so geht die Gleichung (10.) über, überall b statt x in den Zeigern *) setzend

$$10') \; W''_{b\div a}=J'_b\,.\,W'_{b\div a}-\int_{b\div a}J'L'W_{x\div a}\,.\,\partial x;$$

oder weil $W'_{b\div a}=\int_{b\div a}L'W_{x\div a}.\partial x$, und J'_b als constant auch hinter das Integralzeichen gesetzt werden kann:

$$(11') \; W''_{b\div a}=\int_{b\div a}(J'_b-J')L'W_{x\div a}\,.\,\partial x,$$

welches nach (§. 69. 7'.) augenblicklich auf die gewünschte Form gebracht ist, wenn man $(J'_b-J)L'$ statt des dortigen L' setzt, wodurch das dortige $J=\int_{x\div a}L'\partial x$ in $J=\int_{x\div a}(J'_b-J)L'\partial x$ übergeht, während übrigens dann die Formel (§. 69. 7'.) rechts ganz unverändert genommen, das hiesige $W''_{b\div a}$ in der gewünschten Umformung darstellt, so daß man hat

$$(12)' \; W''_{b\div a}=\Big(\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S}.[(-1)^{\mathfrak{c}}\partial^{\mathfrak{c}}.((J_b-J)L_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1}).\partial^{\mathfrak{b}}\delta y]\Big)_{b\div a}$$
$$+\int_{b\div a}\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S}[(-1)^{\mathfrak{a}}.\partial^{\mathfrak{a}}((J_b-J)L_{\mathfrak{a}})]\delta y\,.\,\partial x,$$

wo $\int_{x\div a}L''\partial x=J'$ und $\int_{x\div a}(J'_b-J')L'\partial x=J$ gesetzt worden. (Vergl. §. 69.).

---

*) Es sind nehmlich in der Gleichung (10.) die Endresultate als Funktionen von x, links und rechts identisch, also auch noch gleich, wenn in diesen Endresultaten etwa b statt x gesetzt wird. — Man darf also nicht während der Operationen, durch welche die Endresultate erst hervorgebracht werden sollen, b statt x setzen, also nicht in den Ausdrücken, die hinter dem Integralzeichen stehen, und erst integrirt werden sollen, sondern nur in den Zeigern, welche sich auf die bereits beendigten und vollkommen hergestellten Ausdrücke beziehen.

§. 74. Zusatz.

Sollen aber in der Aufgabe (§. 72.) alle Integrale bestimmt und zwischen denselben Grenzwerthen von x, nehmlich $x = a$ und $x = b$ genommen seyn, so ist jedes einzelne Integral nach x constant, und kann daher in Bezug auf die nächste Integration als Faktor außerhalb des nächsten Integralzeichens gesetzt werden; so daß man dann hat:

$$W''_{b \div a} = \int L'' \int L' \int L \partial x^3 = \int L'' \partial x \times \int L' \partial x \times \int L \partial x,$$

alle Integrale zwischen $x = a$ und $x = b$ genommen, oder wenn man $\int_{b \div a} L'' \partial x = K'$ und $\int_{b \div a} L' \partial x = K$ setzt auch $W''_{b \div a} = K'.K.\int_{b \div a} L \partial x.$

Um daher in diesem Falle die (§. 72.) verlangte Umformung zu erhalten, darf man nur das (§. 65.) für $\int_{b \div a} L \partial x$ erhaltene Resultat noch mit dem Produkt der beiden gegebenen Constanten K' und K multipliciren. *) (Vergl. §. 70.).

§. 75. Zusatz.

Hat aber in den Aufgaben der (§. §. 72 — 74.) das L die Bedeutung des (§. 71. oder §. 67.), so treten in allen 3 Endresultaten, außer den hier in δy erhaltenen Gliedern, ganz analoge in Bezug auf δz, δu, etc. noch hinzu, welche leicht hingeschrieben werden können.

§. 76. Allgemeine Aufgabe.

Es hat L die Bedeutung $L_0.\delta y + L_1.\partial\delta y + L_2.\partial^2\delta y + \ldots + L_m.\partial^m\delta y$, und wie im (§. 65.), sind L', L'', L''', etc. etc. $L^{(\mu-1)}$, $L^{(\mu)}$ beliebige Funktionen von x; auch ist noch gegeben:

$$W^{(\mu)} = \int L^{(\mu)} \int_{x \div a_{\mu-1}} L^{(\mu-1)} \int_{x \div a_{\mu-2}} L^{(\mu-2)} \int_{x \div a_{\mu-3}} \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{x \div a_2} L'' \int_{x \div a_1} L' \int_{x \div a} L \partial x^{\mu+1}.$$

Man soll $W^{(\mu)}_{x \div a_\mu}$ dergestalt umformen, daß alle Ableitungen

*) Auch hier findet die Note des (§. 70.) statt.

von ∂y vom Integralzeichen befreit erscheinen. (Vergl. §. 72. §. 68.).

Auflösung.

Man wird ganz so wie vorher (§. 68. und §. 72.) $W^{(\mu)} = \int L^{(\mu)} W^{(\mu-1)}_{x \div a_{\mu-1}} \partial x$ setzen, theilweise integriren, $\int_{x-a_\mu} L^{(\mu)} \partial x = J^{(\mu-1)}$ setzend, und so diese Aufgabe auf die nächst einfachere zurückführen, wo $W^{(\mu-1)}_{x \div a_{\mu-1}}$ auf die gewünschte Weise umgeformt werden soll. So fortfahrend wird man zuletzt zu den einfachsten (§. 72. und §. 68.) bereits behandelten Fällen zurückgebracht werden, und so die Aufgabe gelößt haben, μ mag eine noch so große ganze Zahl seyn.

§. 77. Zusatz.

In dem Falle, wo alle Integrale mit demselben Grenzwerthe $x = a$ anfangen, und das letzte Integral bestimmt seyn und auch mit $x = b$ aufhören soll, während die übrigen Integrale alle unbestimmt bleiben, wird man nachstehendes Resultat erhalten. — Setzt man nehmlich

$\int_{x \div a} L^{(\mu)} \partial x = J^{(\mu-1)}$; $\int_{x \div a} (J^{(\mu-1)}_b - J^{(\mu-1)}) L^{(\mu-1)} \partial x = J^{(\mu-2)}$; $\int_{x + a} (J^{(\mu-2)}_b - J^{(\mu-2)}) L^{(\mu-2)} \partial x = J^{\mu-3}$;

$$\int_{x \div a} (J^{(\mu-3)}_b - J^{(\mu-3)}) L^{(\mu-3)} \partial x = J^{(\mu-4)}$$

u. s. w. f., und zuletzt

$\int_{x \div a} (J'''_b - J''') L''' = J''$; $\int_{x \div a} (J''_b - J'') L'' \partial x = J'$, zuletzt $\int_{x \div a} (J'_b - J') L' \partial x = J$, so wird man haben

$$W^{(\mu)}_{b \div a} = \Big(\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S} . [(-1)^{\mathfrak{c}} . \partial^{\mathfrak{c}} ((J_b - J) L_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+1}) . \partial^{\mathfrak{d}} \partial y] \Big)_{b \div a}$$

$$+ \int_{b \div a} \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S} [(-1)^{\mathfrak{a}} . \partial^{\mathfrak{a}} ((J_b - J) L_{\mathfrak{a}})] \partial y . \partial x$$

(Vergl. §. 69. und §. 73.).

§. 78. Zusatz.

Sollen aber in der Aufgabe (§. 76.) alle Integrale be-

stimmt und zwischen denselben Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommen werden, so erhält man:

$$W^{(\mu)}_{b \div a} = K^{(\mu-1)}.K^{(\mu-2)}.K^{(\mu-3)}\ldots\ldots K''.K'.K.\int_{b\div a} L\partial x$$

wo $K^{(\mu-1)}$ etc. etc. K, die bestimmten Integrale $\int_{b\div a} L^{(\mu)}\partial x$, $\int_{b\div a} L^{(\mu-1)}\partial x, \ldots\ldots \int_{b\div a} L'\partial x$, die nach x constant sind, vorstellen; so daß der umgeformte Ausdruck des (§. 65.) nur noch mit dem constanten Produkt $K^{(\mu-1)}.K^{(\mu)}\ldots\ldots K$ multiplicirt werden darf, um die Umformung für den hiesigen Fall zu haben. *) (Vergl. §. 70. und §. 74.).

§. 79. Zusatz.

Sollte L außer den Gliedern $L_0.\delta y + L_1.\partial\delta y + \ldots\ldots + L_m.\partial^m\delta y$ auch noch die Glieder

$M_0.\delta z + M_1.\partial\delta z + \ldots\ldots + M_n.\partial^n\delta z$, oder auch noch

$N_0.\delta u + N_1.\partial\delta u + \ldots\ldots + N_p.\partial^p\delta u$, etc. etc. etc. enthalten, so würden auch in den Auflösungen der (§. §. 76—78.) außer den in δy erhaltenen Gliedern, noch ganz analoge Glieder in δz, δu, etc. etc. hinzutreten. (Vergl. §. §. 71. 75. 79.).

§. 80. Aufgabe.

Es ist δy, so wie auch jeder der Ausdrücke L^0_0, L^1_0, L^0_1, L^1_1, L^0_2, etc. etc. eine ganz beliebige Funktion zweier absolut Veränderlichen x und x_1; ferner

$$\begin{aligned} L = L^0_0 + L^0_1.\frac{\partial\delta y}{\partial x} + L^0_2.\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \text{etc.} + L^0_m.\frac{\partial^m\delta y}{\partial x^m} \\ + L^1_0.\frac{\partial\delta y}{\partial x_1} + L^1_1.\frac{\partial^2\delta y}{\partial x.\partial x_1} + \text{etc.} + L^1_{m-1}.\frac{\partial^m\delta y}{\partial x^{m-1}.\partial x_1} \\ + L^2_0.\frac{\partial^2\delta y}{\partial x_1{}^2} + \text{etc.} + L^2_{m-2}.\frac{\partial^m\delta y}{\partial x^{m-2}.\partial x_1{}^2} \\ + \text{etc.} + \text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

oder, wie sich das bequemer schreiben läßt:

$$L = S\left[L^b_a.\frac{\partial^{a+b}\delta y}{\partial x^a.\partial x_1{}^b}\right],$$
$$a+b+c=m$$

*) Hier gilt ins besondere die Note zu (§. 70.).

wo aber die Bedingungsgleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{m}$, wenn man will, auch weggelassen werden kann; endlich sey

$$W=\int_{b+a}\left(\int_{x''\div x'} L\partial x_1\right)\partial x,$$

wo x'' und x' die Grenzwerthe von x_1 sind, zwischen denen das Integral nach x_1 genommen werden soll, welche übrigens selbst noch Funktionen des andern Veränderlichen x seyn können. Man soll W so umformen, daß die Ableitungen von δy so viel wie möglich vom Integralzeichen befreit erscheinen, und wenigstens unter dem doppelten Integralzeichen gar keine Ableitung von δy mehr vorkommt.

Auflösung. Man wende auf jedes einzelne Glied von L oder besser noch auf $L_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}.\frac{\partial^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\delta y}{\partial x^{\mathfrak{a}}.\partial x_1{}^{\mathfrak{b}}}$ (als den Repräsentanten aller Glieder) die Reduktionsformel (§. 63.) an, indem man

statt	u,	v,	$\mathfrak{m}$,	$\mathfrak{n}$,	$\mathfrak{a}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathfrak{d}$
beziehlich	$L_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$,	δy,	$\mathfrak{a}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathfrak{d}$,	$\mathfrak{e}$,	$\mathfrak{f}$

setzt, und erhält

$$1)\quad L=\underset{x,\,x_1}{\partial^2}.\underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{a}-1,\ \mathfrak{e}+\mathfrak{f}=\mathfrak{b}-1}{S.}\left[(-1)^{\mathfrak{c}+\mathfrak{e}}.\frac{\partial^{\mathfrak{c}+\mathfrak{e}}(L_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})}{\partial x^{\mathfrak{c}}.\partial x_1{}^{\mathfrak{e}}}.\frac{\partial^{\mathfrak{d}+\mathfrak{f}}\delta y}{\partial x^{\mathfrak{d}}.\partial x_1{}^{\mathfrak{f}}}\right]$$

$$+\underset{x}{\partial}.\underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{a}-1}{S.}\left[(-1)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}.\frac{\partial^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}(L_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})}{\partial x_1{}^{\mathfrak{b}}.\partial x^{\mathfrak{c}}}.\frac{\partial^{\mathfrak{d}}\delta y}{\partial x^{\mathfrak{d}}}\right]$$

$$+\underset{x_1}{\partial}.\underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{b}-1}{S.}\left[(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}.\frac{\partial^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}(L_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})}{\partial x^{\mathfrak{a}}.\partial x_1{}^{\mathfrak{c}}}.\frac{\partial^{\mathfrak{d}}\delta y}{\partial x_1{}^{\mathfrak{d}}}\right]+S.\left[(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}.\frac{\partial^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}.(L_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})}{\partial x^{\mathfrak{a}}.\partial x_1{}^{\mathfrak{b}}}\right].\delta y,$$

wo jedem der 4 Aggregate noch die Bedingungsgleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{g}=\mathfrak{m}$ hinzugefügt werden kann. — Diese Gleichung wollen wir kürzer so ausdrücken

$$2)\quad L=\underset{x_1\,x_1}{\partial^2}\psi(x,x_1)+\underset{x}{\partial}\psi_1(x,x_1)+\underset{x_1}{\partial}\psi_2(x,x_1)+\psi_3(x,x_1).\delta y$$

$$\text{oder}=\frac{\partial^2.\psi}{\partial x.\partial x_1}+\frac{\partial.\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial.\psi_2}{\partial x_1}+\psi_3.\delta y,$$

wo die Bedeutung von $\psi(x,x_1)$ oder ψ, von $\psi_1(x,x_1)$ oder

ψ_1, von $\psi_2(x, x_1)$ oder ψ_2, endlich von $\psi_3(x, x_1)$ oder ψ_3 in die Augen fällt.

Dann ist

$$3) \int_{x'' \div x'} L \partial x_1 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x'' \div x'} + \int_{x'' \div x'} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \partial x_1 + (\psi_2)_{x'' \div x'} + \int_{x'' \div x'} \psi_3 \cdot \partial y \cdot \partial x_1.$$

Wird nun

I. angenommen, daß x'' und x' von x ganz unabhängig sind, so ist (nach §. 54.)

$$4) \int_{x'' \div x'} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \partial x_1 = \frac{\partial \int_{x'' \div x'} \psi_1 \cdot \partial x_1}{\partial x}$$

und

$$5) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x'' \div x'} = \frac{\partial \cdot \psi_{x'' \div x'}}{\partial x};$$

und wenn man diese Werthe in (n. 3.) substituirt und dann noch nach x integrirt, so ergiebt sich, wenn man bedenkt, daß $(\int_{x'' \div x'} \psi_1 \cdot \partial x_1)_{b \div a} = \int_{x \div x'} (\psi_1)_{b \div a} \cdot \partial x_1$ seyn muß:

$$6) \int_{b \div a} (\int_{x'' \div x'} L \partial x_1) \cdot \partial x = \psi_{x'' \div x', b \div a} + \int_{x'' \div x'} (\psi_1)_{b \div a} \partial x_1 + \int_{b \div a} (\psi_2)_{x'' \div x'} \partial x + \int_{b \div a} (\int_{x'' \div x'} \psi_3 \cdot \partial y \cdot \partial x_1) \cdot \partial x,$$

wo man nur noch statt ψ, ψ_1, ψ_2, und ψ_3 die Aggregate setzen darf, welche sie nach der Annahme (nro. 2.) vorstellen, um die Aufgabe für diesen Fall gelös't zu haben.

Sind aber

II. x'' und x' selbst noch Funktionen von x, so wird das Resultat nicht so einfach, weil dann die Gleichungen (4.) und (5.) nicht mehr gelten, sondern in andere Zusammengesetztere übergehen. — Setzt man nehmlich:

$$7) \int \psi_1 \cdot \partial x_1 = \pi(x, x_1) \text{ oder } = \pi, \text{ so ist } \quad 8) \frac{\partial \pi}{\partial x_1} = \psi_1$$

und dann nach (§. 64.), in so ferne x_1, es mag x'' oder x' vorstellen, als eine Funktion von x betrachtet werden muß,

$$9) \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial \pi}{\overline{\partial x}} - \psi_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x};$$

oder, wenn man hier zuerst x'' dann x' statt x_1 setzt, und die letztere Gleichung von der erstern subtrahirt:

$$10)\ \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_{x''\div x'} = \frac{\partial \cdot \pi_{x''\div x'}}{\partial x} - (\psi_1)_{x''} \cdot \frac{\partial x''}{\partial x} + (\psi_1)_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}.$$

Nun ist aber aus (n. 7.) und nach (§. 54.):

$$11)\ \frac{\partial \pi}{\partial x} = \int \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \partial x_1 \text{ und } 12)\ \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)_{x''\div x'} = \int_{x''\div x'} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \partial x_1;$$

folglich aus (n. 10. und n. 12.) in Verbindung mit (n. 7.):

$$13) \int_{x''\div x'} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \partial x_1 = \frac{\partial \cdot (\int_{x''\div x'} \psi_1 \cdot \partial x_1)}{\partial x} - \left[(\psi_1)_{x''} \cdot \frac{\partial x''}{\partial x} - (\psi_1)_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}\right];$$

und dies ist die Gleichung, welche jetzt statt der Gleichung (n. 4.) zu stehen kommen muß. — Ferner wird jetzt nach (§. 64.), wenn x_1 als eine Funktion von x betrachtet wird

$$14)\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x};$$

folglich, wenn man hier erst x'', dann x' statt x_1 setzt, und letztere Gleichung von ersterer subtrahirt:

$$15)\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x''\div x'} = \frac{\partial \cdot (\psi_{x''\div x'})}{\partial x} - \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x''} \cdot \frac{\partial x''}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}\right],$$

welche nun an die Stelle der Gleichung (n. 5.) zu stehen kommt. Substituirt man aber diese Werthe rechts aus den Gleichungen (n. n. 13. 15.) in die Gleichung (n. 3.) und integrirt dann links und rechts nach x, so erhält man

$$16) \int_{b\div a} (\int_{x''\div x'} L \partial x_1) \partial x =$$
$$= (\psi_{x''\div x'})_{b\div a} - \int_{b\div a} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x''} \cdot \frac{\partial x''}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}\right] \cdot \partial x$$
$$+ (\int_{x''\div x'} \psi_1 \partial x_1)_{b\div a} - \int_{b\div a} \left[(\psi_1)_{x''} \cdot \frac{\partial x''}{\partial x} - (\psi_1)_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}\right] \cdot \partial x$$
$$+ \int_{b\div a} (\psi_2)_{x''\div x'} \cdot \partial x + \int_{b\div a} (\int_{x''\div x'} \psi_3 \cdot \delta y \cdot \partial x_1) \partial x,$$

welches in diesem Falle (II.) das gesuchte Endresultat liefert, statt der Gleichung (n. 6.) im vorigen Falle (I.), wenn man

auch hier statt ψ, ψ_1, ψ_2 und ψ_3 die Aggregate gesetzt denkt, welche sie nach (n. 2.) vorstellen.

Anmerkung 1. Um auf die Bedeutung der Zeichen noch einige Blicke zu werfen, bemerken wir, daß nach (§. 58.) das in der Formel (n. 6.) vorkommende $\psi_{x''\div x',\, b\div a}$ den Ausdruck

$$\psi(x'',b) - \psi(x',b) - \psi(x'',a) + \psi(x',a)$$

vorstellt, wo x'' und x' Werthe von x_1 und b, a, Werthe von x sind; daß dagegen das in der Formel (n. 16.) vorkommende $(\psi_{x''\div x'})_{b\div a}$ den Ausdruck $(\psi(x'',x) - \psi(x',x))_{b\div a}$ d. h. den Ausdruck

$$\psi(x''_b, b) - \psi(x'_b, b) - \psi(x''_a, a) + \psi(x'_a, a)$$

vorstellt, weil x'' und x' selbst wieder Funktionen von x sind, welche in x''_b, x''_a etc. übergehen, wenn b oder a statt x geschrieben wird.

Anmerkung 2. Ferner mag man nicht übersehen, daß

$$\psi = \underset{c+d+e+f+g=m-2}{S.}\left[(-1)^{c+e}\cdot\frac{\partial^{c+e}(L^{e+f+1}_{c+d+1})}{\partial x^c\cdot\partial x_1^{\,e}}\cdot\frac{\partial^{d+f}\delta y}{\partial x^d\cdot\partial x_1^{\,f}}\right]$$

$$\psi_1 = \underset{b+c+d+g=m-1}{S.}\left[(-1)^{b+c}\cdot\frac{\partial^{b+c}.(L^{b}_{c+d+1})}{\partial x_1^{\,b}\cdot\partial x^c}\cdot\frac{\partial^{d}\delta y}{\partial x^d}\right]$$

$$\psi_2 = \underset{a+c+d+g=m-1}{S.}\left[(-1)^{a+c}\cdot\frac{\partial^{a+c}.(L^{c+d+1}_{a})}{\partial x^a\cdot\partial x_1^{\,c}}\cdot\frac{\partial^{d}\delta y}{\partial x_1^{\,d}}\right]$$

endlich

$$\psi_3 = \underset{a+b=m}{S.}\left[(-1)^{a+b}\cdot\frac{\partial^{a+b}(L^{b}_{a})}{\partial x^a\cdot\partial x_1^{\,b}}\right]$$

ist, so daß ψ mit L einerlei Form hat, obgleich in Bezug auf die Ableitungen von δy nach x und nach x_1 nur von der m-2ten Ordnung; während dagegen ψ_1 die Form

$$P.\delta y + Q.\frac{\partial\delta y}{\partial x} + R.\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + U.\frac{\partial^{m-1}\delta y}{\partial x^{m-1}}$$

und ψ_2 die Form

$$P'.\delta y + Q'.\frac{\partial\delta y}{\partial x_1} + R'.\frac{\partial^2\delta y}{\partial x_1^{\,2}} + \ldots + U'.\frac{\partial^{m-1}\delta y}{\partial x_1^{\,m-1}}$$

hat, während endlich ψ_3 weder δy noch irgend eine Ableitung derselben enthält, weshalb eben, in den beiden Formeln (n. 6.) und (n. 16.), unter dem doppelten Integralzeichen gar keine Ableitung von δy mehr vorkommt.

Endlich mag noch bemerkt werden, daß da δy und alle dessen Ableitungen als Funktionen von x und x_1 angesehen werden sollen, sie in bloße Funktionen von x übergehen werden, so oft für x_1 bald x'' bald x' geschrieben wird, während x'' und x' selbst noch Funktionen von x seyn sollen. — Zuletzt muß die Formel (n. 16.) in die andere (n. 6.) übergehen, wenn $\frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} = 0$ gesetzt wird.

§. 81. Aufgabe.

Die Gleichung

1) $L_0.\delta y + L_1.\partial\delta y + L_2.\partial^2\delta y + \ldots + L_m.\partial^m\delta y = X$,

wo $L_0, L_1, L_2 \ldots L_m$ und X Funktionen von x seyn sollen, zu integriren.

Auflösung. Man multiplicire die Gleichung mit einer unbestimmten Funktion von x, die λ seyn mag, nehme links und rechts die Integrale, links nach (§. 65.) theilweise, so erhält man

2) $\int S.\left[(-1)^a.\partial^a.(\lambda.L_a)\right]_{a+b=m}\delta y.\partial x + S.\left[(-1)^c.\partial^c(\lambda.L_{c+d+1}).\partial^b\delta y\right]_{b+c+d=m-1}$
$= \int\lambda X.\partial x + C(\mathrm{onst.})$.

Denkt man sich nun λ so bestimmt, daß

3) $S.\left[(-1)^a.\partial^a(\lambda.L_a)\right]_{a+b=m} = 0$ wird,

so reducirt sich die Gleichung (2.), $\int\lambda X\partial x = X_1$ setzend, auf

4) $S.\left[(-1)^c.\partial^c.(\lambda.L_{c+d+1}).\partial^b\delta y\right]_{b+c+d=m-1} = X_1 + C$,

welche Gleichung (4.) diese Form hat

$\mathfrak{L}_0.\delta y + \mathfrak{L}_1.\partial\delta y + \mathfrak{L}_2.\partial^2\delta y + \ldots + \mathfrak{L}_{m-1}.\partial^{m-1}\delta y = X_1 + C$,

also dieselbe Form wie die gegebene (1.), aber um eine Ordnung niedriger. — Wiederholt man daher dasselbe Verfahren, so erhält man immer eine Gleichung von einer niedrigern Ordnung, und zuletzt δy selbst mit seinen m willkührlichen Constanten.

§. 82. Zusatz.

Die Gleichung (3.) zur Bestimmung von λ hat zwar auch die Form der gegebenen (1.), nehmlich die Form

$$A_0 . \lambda + A_1 . \partial\lambda + A_2 . \partial^2\lambda + \ldots + A_m . \partial^m\lambda = 0$$

nur daß sie rechts Null zu stehen hat, dahero doch einfacher ist; aber sie braucht zur Bestimmung von λ nicht vollständig integrirt zu seyn, sondern man darf nur irgend ein besonderes Integral suchen, welches ihr genügt.

§. 83. Zusatz.

Aus dieser Methode zu integriren, geht wenigstens die Form des vollständigen Integrals hervor, welche folgende seyn wird

$$\delta y = X_m + C . X_{m-1} + C_1 . X_{m-2} + C_2 . X_{m-3} + \ldots\ldots + C_{m-1} . X_0$$

wo $C, C_1, C_2 \ldots C_{m-1}$ die m willkührlichen Constanten $X_m, X_{m-1}, \ldots X_2, X_1, X_0$ aber Funktionen von x sind.

Ist dagegen in der (§. 81.) gegebenen Gleichung (1.) $X = 0$, so hat das Integral diese Form

$$\delta y = C . X_{m-1} + C_1 . X_{m-2} + C_2 . X_{m-3} + \ldots + C_{m-1} . X_0.$$

§. 84. Zusatz.

Wäre aber in der Gleichung (§. 81.) die Funktion X von x selbst noch von der Form

$$M_0 . \delta z + M_1 . \partial\delta z + M_2 . \partial^2\delta z + \ldots + M_n . \partial^n\delta z$$
$$+ N_0 . \delta v + N_1 . \partial\delta v + N_2 . \partial^2\delta v + \ldots + N_p . \partial^p\delta v + \text{etc. etc. etc.}$$

so daß δz, δv noch ganz unbestimmte Funktionen, $M_0, \ldots\ldots M_n$, $N_0, \ldots\ldots N_p$, aber gegebene Funktionen von x wären, so würde man in der Gleichung (4.) das dortige X_1 oder $\int \lambda X \partial x$ selbst wieder nach (§. 65 oder §. 67.) theilweise integriren und so umformen können, daß bloß noch δz, δv allein unter dem Integralzeichen vorkämen, aber keine ihrer Ableitungen, und daß der vom Integralzeichen befreite Theil nach δz, $\partial\delta z \ldots$, δv, $\partial\delta v, \ldots$ lineär wäre.

Anmerkung. Wenn es auch meist in der Ausführung sehr schwer hält, die Integration so durchzuführen wie die Theorie dies angiebt, in so ferne man gewöhnlich mit den größten Hindernissen des Kalküls zu kämpfen hat, so ist es doch zuweilen sehr wichtig, daß man sich nur von der Form des gesuchten Integrals vergewissern könne.

§. 85. Lehrsatz.

Ist (§. 65.):

$$1)\quad L_0.\delta y + L_1.\partial\delta y + L_2.\partial^2\delta y + \ldots + L_m.\partial^m\delta y = 0$$

für jede mögliche Funktion von x, welche statt δy gesetzt werden mag, so muß einzeln jeder Coefficient $=0$ seyn, d. h.

$$L_0 = 0,\; L_1 = 0,\; L_2 = 0, \ldots L_m = 0.$$

Beweis. Denn welche Funktion auch für δy gesetzt werden mag, so bleiben doch immer die Coefficienten L_0, $L_1, \ldots L_m$ dieselben, und haben, wenn sie auch Funktionen von x seyn sollten, für bestimmte Werthe von x ebenfalls bestimmte Werthe. Man denke sich nun für δy eine beliebige (am einfachsten eine ganze) Funktion von x, mit noch wenigstens m unbestimmten Constanten, gesetzt, und dann irgend einen beliebigen Werth α statt x, so hat man (§. 34.):

$$2)\ (L_0)_\alpha.(\delta y)_\alpha + (L_1)_\alpha.(\partial\delta y)_\alpha + \ldots + (L_m)_\alpha.(\partial^m\delta y)_\alpha = 0.$$

Man nehme nun die in δy eingegangenen m willkührlichen Constanten nach und nach immer anders und anders an, so soll die Gleichung (2.) noch immer statt finden, also auch wenn man die Constanten nach und nach so annimmt, daß von den $m+1$ Ausdrücken

$$(\delta y)_\alpha,\ (\partial\delta y)_\alpha,\ (\partial^2\delta y)_\alpha \ldots (\partial^m\delta y)_\alpha$$

immer je m derselben Null werden, der $m+1^{te}$ aber nicht Null wird. Weil aber dann die Gleichung (2.) bald $(L_0)_\alpha.(\delta y)_\alpha = 0$, bald $(L_1)_\alpha.(\partial\delta y)_\alpha = 0$, bald $(L_2)_\alpha.(\partial^2\delta y)_\alpha = 0$, u. s. w. f; auch $(L_m)_\alpha.(\partial^m\delta y)_\alpha = 0$ wird, so wird sie nicht in jedem Falle existiren können, wenn nicht die Coefficienten $(L_0)_\alpha$, $(L_1)_\alpha$, $(L_2)_\alpha, \ldots (L_m)_\alpha$ einzeln Null sind. — Und weil dies für jeden beliebigen Werth α von x gilt, so gilt es auch für jeden Werth von x d. h. die Coefficienten $L_0, L_1, L_2, \ldots L_m$ müssen identisch Null seyn.

Anmerkung. Nach der: Analytischen Darstellung der Variationsrechnung etc. Berlin 1823. p. p. 95. 96. scheint dieser

eben bewiesene Lehrsatz nicht statt zu finden und zwar weil δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y \ldots \partial^m\delta y$ nicht von einander unabhängig sind. — Für Anfänger glauben wir daher besonders noch bemerken zu müssen, daß zwar δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y, \ldots$ der Form nach von einander abhängen, weil zugleich mit δy die Form von $\partial\delta y$, etc. etc. mit gegeben ist; daß aber dieselben Ausdrücke dem Werthe nach noch gänzlich von einander unabhängig seyn können und seyn werden, so lange für δy jede beliebige Funktion von x gesetzt werden soll. — Denn der Werth dieser Ausdrücke hängt nicht bloß von der Form von δy, sondern auch von dem Werthe der in δy beliebig eingehenden Constanten (Coefficienten) ab, so daß, während die Form von δy dieselbe bleibt, der Werth desselben δy mit dem Werthe der in dieser Form angenommenen constanten Coefficienten zugleich sich ändern und mit letzteren zugleich beliebig seyn wird. — Und hierauf gründet sich der vorstehende Beweis.

§. 86. Zusatz.

Aus diesem Beweise geht auch noch hervor, daß die einzelnen Coefficienten L_0, L_1, L_2, etc.... L_m noch immer Null seyn müßten, wenn auch die Gleichung $L=0$ nicht für jede beliebige Funktion von x für δy gelten soll, sondern nur für ein durch eine Differentialgleichung gegebenes δy, wenn nur die Integration dieser letztern das δy mit so viel unbestimmten und willkührlichen Constanten liefert, um für jeden Werth $x=\alpha$, diese Constanten so annehmen zu können, daß von den $m+1$ Ausdrücken

$(\delta y)_\alpha$, $(\partial\delta y)_\alpha$, $\partial^2\delta y)_\alpha \ldots$, $(\partial^m\delta y)_\alpha$ je m der Null gleich werden, während der $m+1^{te}$ nicht Null wird.

Dies würde also namentlich im Allgemeinen der Fall seyn, wenn die Gleichung $L=0$ existiren sollte für jedes durch die lineäre Gleichung

3) $M_0.\delta y + M_1.\partial\delta y + M_2.\partial^2\delta y + \ldots . M_n.\partial^n\delta y = 0$ oder $\varphi=0$

gegebene δy und dabei $n>m$ wäre. (§. 83.). Für $n=m$ erhält man dagegen aus der Gleichung (n. 3.), wenn man sie integrirt, zwar auch δy als eine bestimmte Funktion von x mit m willkührlichen Constanten und von der (§. 83.) angegebenen Form; aber eine dieser Constanten würde aus der

Gleichung (n. 1.) von selbst wegfallen, so daß nur noch m-1 willkührliche Constanten bleiben könnten, durch welche der angegebene Zweck im allgemeinen nicht erreicht werden würde.— Eliminirt man aber aus (nro. 1 und n. 3.) die höchste Ableitung $\partial^m\delta y = \partial^n\delta y$ (weil $m = n$), so erhält man (nach §. 1.), unter der Voraussetzung, daß λ gegeben ist durch die Gleichung $L_m + \lambda . M_m = 0$, jetzt:

$$4) \ (L_0 + \lambda.M_0).\delta y + (L_1 + \lambda.M_1).\partial\delta y + (L_2 + \lambda.M_2).\partial^2\delta y + \ldots + (L_{m-1} + \lambda . M_{m-1}) . \partial^{m-1}\delta y = 0;$$

und diese Gleichung, da sie nur von der $(m-1)^{ten}$ Ordnung ist, würde nun nicht für jedes der Gleichung (n. 3.) genügende δy existiren können, wenn nicht ihre Coefficienten einzeln $= 0$ wären; also ist $L_0 + \lambda.M_0 = 0$, $L_1 + \lambda.M_1 = 0$ u. s. w. bis zuletzt $L_{m-1} + \lambda.M_{m-1} = 0$; sobald $L = 0$ ist, für jedes δy, welches der Gleichung (n. 3.) genügt, unter der Voraussetzung daß $n = m$.

Wäre endlich $n < m$ und zwar $n + \nu = m$, so hätte man außer der Gleichung (n. 3.) die durch $\varphi = 0$ bezeichnet und nach δy von der n^{ten} Ordnung ist, noch die ν Ableitungs-Gleichungen $\partial\varphi = 0$, $\partial^2\varphi = 0$, $\partial^3\varphi = 0$, $\ldots \partial^\nu\varphi = 0$, welche alle lineär sind nach δy und ihren Ableitungen, und der Reihe nach von immer höherer und höherer Ordnung nach δy, bis die letzte $\partial^\nu\varphi = 0$ von der $n + \nu^{ten}$ d. h. von der m^{ten} Ordnung ist. Eliminirt man nun aus der Gleichung (n. 1.), mit Hülfe der $\nu + 1$ Gleichungen $\varphi = 0$, $\partial\varphi = 0, \ldots \partial^\nu\varphi = 0$, die $\nu + 1$ höchsten Ableitungen (nach §. 1.), so erhält man eine Eliminations-Gleichung von der Form.

5) $\mathfrak{L}_0.\delta y + \mathfrak{L}_1.\partial\delta y + \ldots + \mathfrak{L}_{n-1} . \partial^{n-1}\delta y = 0$ welche noch immer lineär, aber nur von der $n-1^{ten}$ Ordnung ist. Diese Gleichung kann nun nicht anders existiren, für jedes δy, welches der Gleichung (n. 3.) genügt, als nur wenn die Coefficienten derselben einzeln $= 0$ sind; also nur wenn $\mathfrak{L}_0 = 0$, $\mathfrak{L}_1 = 0$, $\mathfrak{L}_2 = 0$, $\mathfrak{L}_3 = 0, \ldots \mathfrak{L}_{n-1} = 0$ ist.

Um daher in diesem letztern Falle die Gleichungen zu

haben, in welche die gegebene Gleichung (n. 1.) zerfallen muß, darf man nur die Gleichung

$$L + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \partial\varphi + \lambda_2 . \partial^2\varphi + \ldots . \lambda_\nu . \partial^\nu\varphi = 0$$

bilden, die einzelnen Coefficienten alle $= 0$ setzen, und zuletzt die unbestimmten $\lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_\nu$ eliminiren. — Dasselbe gilt auch schon, wenn $m \gtreqless n$ ist, wo dann bloß die Gleichung $L + \lambda . \varphi = 0$ gebildet, jeder ihrer einzelnen Coefficienten $= 0$ gesetzt, und λ eliminirt wird.

Anmerkung. Diesem letzteren Beweise giebt nur der Umstand eine vollständige Klarheit, daß nach (§. 83.) die Form von δy, wenn solches mittelst einer lineären Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung gegeben ist, bestimmt und

$$= C . X + C_1 . X_1 + C_2 . X_2 + C_3 . X_3 + \ldots + C_{n-1} . X_{n-1}$$

ist, so daß man diese Form statt δy in (§. 86. n. 5.) setzen und so sich durch die entstehenden Gleichungen auf völlig elementarem und anschaulichem Wege versichern kann, daß $\mathfrak{L}_0 = 0$, $\mathfrak{L}_1 = 0$, $\mathfrak{L}_2 = 0, \ldots$ $\mathfrak{L}_{n-1} = 0$ gefunden werden müsse.

§. 87. Lehrsatz.

Ist

$$1) \left.\begin{array}{l} L = L_0 . (\delta y)_a + L_1 . (\partial\delta y)_a + L_2 . (\partial^2\delta y)_a + \ldots + L_m . (\partial^m\delta y)_a \\ + {}'L_0 . (\delta y)_b + {}'L_1 . (\partial\delta y)_b + {}'L_2 . (\partial^2\delta y)_b + \ldots + {}'L_n . (\partial^n\delta y)_b \\ + {}''L_0 . (\delta y)_c + {}''L_1 . (\partial\delta y)_c + {}''L_2 . (\partial^2\delta y)_c + \ldots + {}''L_p . (\partial^p\delta y)_c \end{array}\right\} = 0$$

für jede Funktion δy von x, während a, b, c, Werthe von x seyn sollen (§. 34.); und sind zwischen δy und deren Ableitungen, für $x = a$, $x = b$, $x = c$ nicht noch Gleichungen vorhanden, so müssen die Coefficienten

$$L_0, L_1 \ldots L_m, {}'L_0, {}'L_1, \ldots {}'L_n, {}''L_0, \ldots {}''L_p$$

einzeln der Null gleich seyn.

Beweis. Denn man denke sich für δy eine beliebige (z. B. ganze) Funktion von x mit $m + n + p + 3$ unbestimmten Constanten gesetzt, so werden sich diese Constanten allemal so bestimmen lassen, daß von den $m + n + p + 3$ Ausdrücken $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_a$ etc. etc. die in $L = 0$ vorkommen, alle bis auf irgend einen beliebigen der Null gleich werden, die-

ser einzige aber nicht Null wird (während die Coefficienten durch keine andere Annahme der in δy gedachten Constanten verändert werden). — Soll also die Gleichung $L=0$ auch für dieses, mit diesen bestimmten Constanten versehene δy noch statt finden, so muß der Coefficient dieses einzigen der Ausdrücke $(\delta y)_a$, etc. etc. etc. für sich der Null gleich seyn; und da dies für **jedes** beliebige der in $L=0$ vorkommenden Glieder gilt, so muß **jeder** dieser Coefficienten für sich der Null gleich seyn.

Anmerkung. Der Lehrsatz würde natürlich gelten, wenn auch noch Glieder wie $'''L_0(\partial y)_d$, $'''L_1(\partial\delta y)_d$, etc. etc. u. s. w. fort in beliebiger Anzahl in der Gleichung $L=0$ vorkommen sollten; aber eben so, wenn die mit $(\delta y)_c$, $(\partial\delta y)_c$ etc. etc. $(\partial^p\delta y)_c$ behafteten Glieder gar nicht vorkämen; oder wenn bloß die für $x=a$ genommene δy, $\partial\delta y$, etc. etc. allein vorkommen sollten.

§. 88. Zusatz.

So wie aber zwischen
$(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_a$, ... $(\partial^m\delta y)_a$, $(\delta y)_b$, etc. $(\partial^n\delta y)_b$, etc. $(\delta y)_c$ etc.
noch Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ etc. gegeben sind, findet der obige Beweis (§. 87.) nicht mehr statt, weil man nun nicht mehr, in so ferne diesen Gleichungen genügt werden muß, beliebig viel der Ausdrücke $(\delta y)_a$, etc. etc. etc. der Null gleich setzen darf.

Sind dagegen diese Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, etc. etc. deren Anzahl μ seyn mag, von derselben Form, wie die gegebene Gleichung $L=o$, d. h. ebenfalls linear, so kann man μ der Ausdrücke

$$(\delta y)_a,\ (\partial\delta y)_a \text{ etc., } (\delta y)_b \text{ etc. etc. etc.}$$

nach (§. 1.) eliminiren, indem man die Gleichung

$$2)\qquad L+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\lambda_2.\varphi_2+\ldots+\lambda_{\mu-1}.\varphi_{\mu-1}=0$$

bildet, und dann die μ unbestimmten Ausdrücke λ, $\lambda_1 \ldots \lambda_{\mu-1}$ so annimmt, daß in der Gleichung (n. 2.) μ der Coefficienten Null werden. In der dadurch entstehenden Eliminations-

gleichung, da sie noch immer für jedes δy gelten soll, welches den Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. genügt, kann man einige der Constanten von δy dazu verwenden, daß letzteren Bedingungen Folge geleistet werde; und wegen der übrigen eingehenden noch willkührlichen constanten Coefficienten von δy, kann dann auf dieselbe Art nachgewiesen werden, daß in dieser Eliminationsgleichung wiederum die einzelnen Coefficienten $=0$ seyn müssen.

Um daher in diesem Falle die Gleichungen zu erhalten, in welche die gegebene Gleichung $L=0$ (n. 1.) zerfallen muß (sobald sie für jedes δy gelten soll, welches den Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. genügt) darf man nur in der Gleichung (n. 2.) alle Coefficienten, von

$$(\delta y)_a,\ (\partial\delta y)_a,\ \text{etc. etc.},\ (\delta y)_b,\ (\partial\delta y)_b,\ \text{etc. etc.}$$
$$(\delta y)_c,\ (\partial\delta y)_c,\ \text{etc. etc.}$$

einzeln der Null gleich setzen und aus den entstehenden Gleichungen die unbestimmten λ, λ_1, λ_2, etc. etc. $\lambda_{\mu-1}$ eliminiren.

§. 89. Lehrsatz.

Ist a ein Werth von x und

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} L=L_0.\delta y+L_1.\partial\delta y+L_2.\partial^2\delta y+\ldots+L_m.\partial^m\delta y \\ +'L_0.(\delta y)_a+'L_1.(\partial\delta y)_a+'L_2.(\partial^2\delta y)_a+\ldots+'L_n.(\partial^n\delta y)_a \end{array}\right\}=0$$

für jede Funktion von x, die statt δy gesetzt werden mag, so müssen die Coefficienten L_0, L_1, ... L_m, $'L_0$, $'L_1$, ... $'L_n$ einzeln der Null gleich seyn.

Beweis. Denn man kann für δy eine beliebige (z. B. ganze) Funktion von x schreiben, mit so viel unbestimmten Constanten, daß eine Anzahl dieser Constanten verbraucht werden kann, um die Ausdrücke $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_a$ ... $(\partial^n\delta y)_a$, alle der Null gleich zu machen. — Dann reducirt sich die Gleichung $L=0$, bloß auf die erste Linie, welches die Gleichung des (§. 85.) ist, und welche hier existiren, muß für diese bestimmte jedoch noch so viele unbestimmte Constanten enthaltende Funktion δy, um den dortigen Beweis durchführen zu

können, durch welchen außer Zweifel gesetzt wird, wie diese Gleichung $L=0$ nicht allemal existiren könnte, selbst nicht für die hier angenommene bestimmte Form von δy, wenn nicht $L_0=L_1=L_2,\ldots=L_m=0$ wäre. — Hat man sich aber davon überzeugt, so ist die Gleichung $L=0$, keine andere als diese

$$'L_0.(\delta y)_a+'L_1.(\partial\delta y)_a+'L_2.(\partial\delta^2 y)_a+\ldots+'L_n.(\partial^n\delta y)_a=0,$$

welche also wiederum für jedes δy gelten muß, weshalb dann nach (§. 87.) auch

$$'L_0=0,\ 'L_1=0;\ 'L_2=0,\ 'L_3=0,\ldots 'L_n=0$$

seyn muß.

§. 90. Zusatz.

Enthielte die vorstehende Gleichung (n. 1.) noch Glieder mit $(\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_b$, etc.... $(\delta y)_c$, $(\partial\delta y)_c$, etc. etc., u. s. w.; ferner noch Glieder mit δz, $\partial\delta z$, etc. etc., und noch solche die $(\delta z)_d$, $(\partial\delta z)_d\ldots$ und noch solche die $(\delta z)_e$, $(\partial\delta z)_e$, etc. etc., u. s. w. f. zu Faktoren haben; sollten endlich in $L=0$, noch ähnliche Glieder wie in δy, δz, auch in δu, δv, etc. vorkommen; und sollte zuletzt die Gleichung $L=0$ gelten für jede beliebige Funktion δy, δz, δu, δv u. s. w. von x; so müßten noch die Coefficienten der Glieder einzeln der Null gleich seyn.

Dies wäre aber nicht mehr der Fall, wenn die Gleichung $L=0$, nicht für jede beliebige Funktion δy, oder nicht für jedes beliebige δz, δu, δv, etc. gelten sollte, sondern für solche Funktionen, welche noch gegebenen Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. genügen. — Sind aber diese Gleichungen von einer lineären Form, so kann man durch sie so viele der von δy, δz, δu oder δv etc. abhängenden Ausdrücke eliminiren, als möglich, und dann läßt sich wie dies (§. 86.) für einen einfachern Fall geschehen ist, in gegebenen Fällen jedesmal noch besonders untersuchen, ob die Coefficienten dieser (ebenfalls lineären) Eliminationsgleichung einzeln $=0$ seyn müssen, oder nicht; was wir hier für's erste

nicht weiter verfolgen wollen, da es genügt, auf den Weg hingewiesen zu haben, auf welchen dergleichen Untersuchungen vorgenommen und beendigt werden können.

§. 91. Lehrsatz.

Ist $L=S.\left[L^b_a.\frac{\partial^{a+b}.\delta y}{\partial x^a.\partial x_1{}^b}\right]=0$ (§. 80.) für jede beliebige Funktion von x und x_1, die statt δy gesetzt werden mag, so ist einzeln jeder Coefficient $=0$, nehmlich

$$L^0_0=0,\ L^0_1=0,\ L^1_0=0,\ L^0_2=0,\ L^1_1=0,\ L^2_0=0, \text{ etc. etc.}$$

Beweis. Den frühern analog.

§. 92. Zusatz.

Es ist aber sehr leicht, Sätze, die mit den (§.§. 85—91.) aufgestellten analog sind, für den Fall, daß, wie im vorhergehenden (§. 91.), δy eine beliebige Funktion zweier (oder mehrer) Veränderlichen x, x_1 u. s. w. seyn soll, aufzustellen und solche auf dem hier betretenen Wege unmittelbar zu erweisen.

§. 93. Lehrsatz.

Ist

$$W=(\int\psi(x).\delta y.\partial x+P.\delta y+Q.\partial\delta y+R.\partial^2\delta y+\ldots+U.\partial^m\delta y)_{b\div a}=0, \text{ d. h.}$$

1) $\int_{b\div a}\psi(x).\delta y.\partial x$

$$\left.\begin{matrix}+P_b.(\delta y)_b+Q_b.(\partial\delta y)_b+R_b.(\partial^2\delta y)_b+\ldots+U_b.(\partial^m\delta y)_b\\ -P_a.(\delta y)_a-Q_a.(\partial\delta y)_a-R_a.(\partial^2\delta y)_a-\ldots-U_a.(\partial^m\delta y)_a\end{matrix}\right\}=0$$

für jede beliebige Funktion von x, welche statt δy geschrieben werden mag, so muß

2) $\psi(x)=0$ für jeden Werth von x, und noch

3) $(P.\delta y+Q.\partial\delta y+R.\partial^2\delta y+\ldots+U.\partial^m\delta y)_{b\div a}=0$ seyn,

und daher müssen wiederum nach (§. 87.) auch die einzelnen Coefficienten P_b, Q_b, R_b, etc. P_a, Q_a, R_a, etc. der Null gleich seyn.

Beweis. Denn setzt man für δy eine beliebige (z. B. ganze) Funktion von x mit einer hinlänglichen Zahl von unbestimmten Constanten, so wird $\int_{b\div a}\varphi(x).\delta y.\partial x$ eine Funk-

tion von b und a und diesen unbestimmten Constanten, ohne mehr x zu enthalten. Eine dieser Constanten von δy wird man also dazu leicht verwenden können, um

$\int_{b \div a} \varphi x . \delta y . \partial x = 0$ zu machen, auch wenn $\psi(x)$ nicht Null seyn sollte, und weil dann die Gleichung (n. 3.) nothwendig für dieses noch hinlänglich viel unbestimmte Constanten enthaltende δy statt finden muß, so werden nach (§. 87.) die einzelnen Coefficienten

$$P_b, P_a, Q_b, Q_a, R_b, R_a \text{ etc. etc.}$$

der Null gleich seyn müssen. — Dann reducirt sich aber die Gleichung (n. 1.) bloß auf

$$4) \quad \int_{b \div a} \psi x . \delta y . \partial x = 0$$

welche also, der Voraussetzung zu Folge, für jedes δy statt finden soll. — Gesetzt nun es wäre $\psi(x)$ nicht identisch Null, so könnte man $\delta y = \frac{1}{\psi(x)}$ nehmen, und erhielte dann aus (n. 4.), und nach (§. 49. und §. 34.):

$$\int_{b \div a} \psi(x) . \delta y . \partial x = \int_{b \div a} . \partial x = x_{b \div a} = b - a = 0,$$

welches offenbar nicht möglich ist, weil b von a verschieden gedacht werden muß (wenn überhaupt ein Sinn in dem Lehrsatze liegen soll). In so ferne also die Annahme, daß $\psi(x)$ nicht Null ist, zu einem Widerspruche führt, so muß

$\psi(x) = 0$ seyn.

§. 94. Zusatz.

Soll die Gleichung $W = 0$ nicht für jede Funktion δy statt finden, sondern nur für alle diejenigen Funktionen δy, welche den Gleichungen

$$\varphi = A_0 . (\delta y)_a + A_1 . (\partial \delta y)_a + \ldots + 'A_0 . (\delta y)_b + 'A_1 . (\partial \delta y)_b + \ldots = 0$$

$$\varphi_1 = B_0 . (\delta y)_a + B_1 . (\partial \delta y)_a + \ldots + 'B_0 . (\delta y)_b + 'B_1 . (\partial \delta y)_b + \ldots = 0$$

u. s. w. f. genügen, so würde man nach (§. 1.) so viele der von δy abhängenden Ausdrücke eliminiren, als Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. gegeben sind, indem man die Gleichung

$$5) \quad W_1 = W + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1 + \ldots = 0$$

bildet, und so viele der Coefficienten $=0$ setzt, als zur Bestimmung von λ, λ_1, etc. erforderlich sind. — Dann ist leicht einzusehen, daß man δy mit soviel unbestimmten Constanten sich denken kann, daß erstlich den Gleichungen

$\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. genügt und dann doch noch dem (§. 93.) analog bewiesen werden kann, wie die einzelnen Coefficienten von $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_a$, etc. etc. $(\delta y)_b$ etc. etc. in (n. 5.), der Null gleich seyn müssen. — Die Gleichung (n. 5.) reducirt sich daher jetzt wieder auf die obige Gleichung (n. 4.) nur mit dem Unterschiede, daß letztere nicht für jede Funktion δy statt finden muß, sondern nur für alle diejenigen, welche den Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. genügen. Um daher jetzt zu beweisen, daß doch wiederum $\psi x=0$ seyn müsse, wird man einen von dem (§. 93.) betretenen verschiedenen Weg einschlagen müssen. — Man denke sich daher, im Falle $\psi(x)$ nicht Null wäre, $\delta y = \frac{\pi(x)}{\psi(x)}$ gesetzt, indem man unter $\pi(x)$ irgend eine z. B. ganze Funktion von x sich denkt, mit beliebig und hinlänglich viel unbestimmten Constanten (Coefficienten), deren einige diejenige Bestimmung erhalten mögen, welche erforderlich, damit dieses δy den Gleichungen

$\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. genügt. Dann ist nach (n. 4.), auch:

$$6)\ \int_{b+a}\psi(x)\cdot\delta y\cdot\partial x=\int_{b+a}\pi(x)\cdot\partial x=0.$$

Ist nun $\pi(x)=A_0+A_1.x+A_2.x^2+A_3.x^3+\ldots+A_\mu.x^\mu$, so ist

$$\int\pi(x).\partial x=A_0.x+\tfrac{1}{2}A_1.x^2+\tfrac{1}{3}A_2.x^3+\tfrac{1}{4}A_3.x^4+\ldots+\frac{1}{\mu+1}A_\mu.x^{\mu+1}$$

und

$$7)\ \int_{b+a}\pi(x).\partial x=A_0.(b-a)+\tfrac{1}{2}A_1.(b^2-a^2)+\tfrac{1}{3}A_2.(b^3-a^3)+\ldots$$
$$+\frac{1}{\mu+1}A_\mu.(b^{\mu+1}-a^{\mu+1}),$$

wo einige der Coefficienten (unbestimmten Constanten in δy) diejenige Bestimmung erhalten haben, damit δy den Glei-

tion von b und a und diesen unbestimmten Constanten, ohne mehr x zu enthalten. Eine dieser Constanten von δy wird man also dazu leicht verwenden können, um

$\int_{b+a}\varphi x.\delta y.\partial x = 0$ zu machen, auch wenn $\psi(x)$ nicht Null seyn sollte, und weil dann die Gleichung (n. 3.) nothwendig für dieses noch hinlänglich viel unbestimmte Constanten enthaltende δy statt finden muß, so werden nach (§. 87.) die einzelnen Coefficienten

$$P_b, P_a, Q_b, Q_a, R_b, R_a \text{ etc. etc.}$$

der Null gleich seyn müssen. — Dann reducirt sich aber die Gleichung (n. 1.) bloß auf

$$4) \quad \int_{b+a}\psi x.\delta y.\partial x = 0$$

welche also, der Voraussetzung zu Folge, für jedes δy statt finden soll. — Gesetzt nun es wäre $\psi(x)$ nicht identisch Null, so könnte man $\delta y = \frac{1}{\psi(x)}$ nehmen, und erhielte dann aus (n. 4.), und nach (§. 49. und §. 34.):

$$\int_{b+a}\psi(x).\delta y.\partial x = \int_{b+a}.\partial x = x_{b+a} = b - a = 0,$$

welches offenbar nicht möglich ist, weil b von a verschieden gedacht werden muß (wenn überhaupt ein Sinn in dem Lehrsatze liegen soll). In so ferne also die Annahme, daß $\psi(x)$ nicht Null ist, zu einem Widerspruche führt, so muß

$\psi(x) = 0$ seyn.

§. 94. Zusatz.

Soll die Gleichung $W = 0$ nicht für jede Funktion δy statt finden, sondern nur für alle diejenigen Funktionen δy, welche den Gleichungen

$$\varphi = A_0.(\delta y)_a + A_1.(\partial\delta y)_a + \ldots + 'A_0.(\delta y)_b + 'A_1.(\partial\delta y)_b + \ldots = 0$$
$$\varphi_1 = B_0.(\delta y)_a + B_1.(\partial\delta y)_a + \ldots + 'B_0.(\delta y)_b + 'B_1.(\partial\delta y)_b + \ldots = 0$$

u. s. w. f. genügen, so würde man nach (§. 1.) so viele der von δy abhängenden Ausdrücke eliminiren, als Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. gegeben sind, indem man die Gleichung

$$5) \quad W_1 = W + \lambda.\varphi + \lambda_1.\varphi_1 + \ldots = 0$$

Beweis. Denn man denke sich für δz eine solche Funktion von x mit so viel unbestimmten Constanten gesetzt, und diese Constanten nachgehends so bestimmt, daß alle mit δz und dessen Ableitungen behafteten Glieder Null werden. Dann reducirt sich die Gleichung (n. 1.) auf die Gleichung, des (§. 93.), so daß also $\psi(x)=0$, und auch alle mit

$(\delta y)_a$, $(\delta y)_b$, $(\partial \delta y)_a$ etc. etc. behafteten Coefficienten einzeln der Null gleich seyn müssen.

§. 96. Zusatz.

Ebenfalls würden $\psi=0$ und $\psi_1=0$ seyn, und alle die Gleichungen statt finden müssen, die man erhält, wenn in $W+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\ldots=0$, die Coefficienten von

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\delta z)_b$, $(\delta z)_a$, $(\partial \delta y)_b$, etc. etc.

einzeln $=0$ gesetzt, dann aber λ, λ_1 etc. aus diesen Gleichungen eliminirt werden; im Falle (nicht zwischen δy, δz, sondern) zwischen

$(\delta y)_a$, $(\delta z)_a$, $(\delta y)_b$, $(\delta z)_b$, $(\partial \delta y)_a$ etc. etc. etc.

noch Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. von linearer Form gegeben wären, so daß $W=0$ nicht für alle mögliche Funktionen δy, δz, sondern nur für alle diejenigen existiren sollte, welche zugleich diesen Gleichungen

$\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. genügen. (Vergl. §. 94.).

Anmerkung. Wäre dagegen zwischen δy und δz selbst (als Funktionen von x, und nicht für bestimmte Werthe vom x) noch eine Gleichung $\pi=0$ gegeben (eine Urgleichung oder eine Differentialgleichung) aber jedesmal von linearer Form, so würden die Gleichungen

$\psi(x)=0$ und $\psi_1(x)=0$ nicht mehr statt finden müssen, sondern man müßte aus der Gleichung $\pi=0$, das δz in δy ausdrücken, in W substituiren und so diesen Fall auf den (§. 93.) betrachteten zurückführen.

§. 97. Zusatz.

Sollten aber in der Gleichung $W=0$ auch noch analoge Glieder nach δu, δv, etc. vorkommen, so wie sie nach δy, δz vorhanden sind, so würde auf dieselbe Weise bewiesen, daß

auch die Coefficienten von δu, δv, etc., die unter dem Integralzeichen noch stehen, einzeln $=0$ seyn müssen, so wie die Coefficienten von $(\delta u)_a$, $(\delta u)_b$, $(\partial\delta u)_a$ etc. etc. und von $(\delta v)_a$, $(\delta v)_b$, $(\partial\delta v)_a$ etc. etc. etc., wenn nur die Gleichung $W=0$ für alle möglichen Funktionen von x statt finden soll, die statt δy, δz, δu, δv, etc. gesetzt werden mögen.

Sind aber zwischen δy, δz, δu, δv etc. noch lineäre Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, gegeben, jedoch nicht zwischen diesen Funktionen selbst, sondern nur zwischen ihren Grenzwerthen für $x=a$ und $x=b$, so werden zwar noch immer die unter dem Integralzeichen von δy, δz, δu, δv, etc. afficirten Coefficienten $=0$ seyn müssen. Was aber die übrigen Gleichungen betrifft, in welche die $W=0$ zerfallen muß, so wird man sie auf eine dem (§. 95.) analoge Weise entwickeln müssen.

So wie aber zwischen δy, δz, δu, δv, etc. als Funktionen von x noch Gleichungen gegeben seyn sollten

$\pi=0$, $\pi_1=0$, etc. etc. so würden die unter dem Integralzeichen mit δy, δz, δu, δv, etc. behafteten Coefficienten nicht mehr einzeln $=0$ seyn müssen, sondern man muß diesen Fall dadurch auf einen der vorhergehenden reduciren, daß man aus $W=0$, mittelst der Gleichungen

$\pi=0$, $\pi_1=0$, etc. so viele der Funktionen δy, δz, δu, δv, etc. eliminirt, als durch diese Gleichungen selbst in die übrigen ausgedrückt, gegeben sind.

Anmerkung. Da es bloß unsre Absicht ist, den Weg anzudeuten, auf welchem dergleichen Untersuchungen, einfach, leicht, allgemein und strenge durchgeführt werden können, so wollen wir uns in ein näheres Detail hier nicht einlassen, sondern für Anfänger bloß noch bemerken, daß Beweise der vorliegenden Sätze (§. 93 und §. 95.) auch in der: Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung. Berlin 1823. p. 104. und p. 117. zu finden sind, die aber nicht bindend zu seyn scheinen. — Hat man nehmlich die Gleichung (§. 93. n. 1.), oder wie sie in der angeführten Stelle (p. 104.) ausgedrückt ist,

1) $\int \delta y \cdot \varphi(x) \cdot \partial x + \Omega_2 - \Omega_1 = 0$, und setzt man nachgehends $\delta y = (x-b)^{m+q} \cdot (x-a)^{m+p}$, so wird für dieses δy offenbar $(\delta y)_a$, $(\partial \delta y)_a$, ... $(\partial^m \delta y)_a$, eben so $(\delta y)_b$, $(\partial \delta y)_b$, ... $(\partial^m \delta y)_b$ (jedes für sich) der Null gleich und für dieses δy ist daher offenbar

2) $\int \delta y \cdot \varphi(x) \cdot \partial x = 0$ und $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$.

Es scheint aber zu gewagt zu seyn, daraus, daß die Gleichung (1.) für dieses bestimmte δy in die beiden Gleichungen (2.) zerfällt, zu folgern, daß diese Zerfällung nun auch für jedes δy statt finden müsse.

Ganz anders aber ist es, wenn gezeigt worden, daß die gegebene Gleichung für irgend ein bestimmtes δy nicht existiren könnte, wenn nicht die Coefficienten in Ω_2 und Ω_1 der Null gleich wären. Denn dann findet $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$, in so ferne alle einzelnen Coefficienten Null sind, für jedes δy statt, und dann ist auch nothwendig $\int \delta y \cdot \varphi(x) \cdot \partial x = 0$, für jedes δy (die Integrale immer zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommen).

§. 98. Lehrsatz.

Ist W derselbe Ausdruck wie der (§. 80. I. n. 6.) oder (§. §. 34. 58.):

1) $W = \int_{b \div a} (\int_{x'' \div x'} \psi_3 . \delta y . \partial x_1) . \partial x + \int_{b+a} (\psi_2)_{x'' + x'} . \partial x$
$+ \int_{x'' \div x'} (\psi_1)_{b \div a} . \partial x_1 + \psi_{x'' + x', \, b+a}$,

wo ψ_3, ψ_2, ψ_1 und ψ die Bedeutung und die Form (§. 80. Anmerkung 2.) haben sollen, so daß namentlich ψ die Form

$$''P . \delta y + ''Q . \frac{\partial \delta y}{\partial x} + ''S . \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots$$
$$+ ''R . \frac{\partial \delta y}{\partial x_1} + ''T . \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x . \partial x_1} + \ldots$$
$$+ ''U . \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x_1^2} + \ldots$$

hat, und ist nun

2) $W = 0$ für jede Funktion von x und x_1, welche statt δy gesetzt werden mag, so ist auch

3) $\psi_3 = 0$ für jeden Werth von x und x_1,

4) die Coefficienten von ψ_1 sowohl für $x = b$, als auch für $x = a$, einzeln der Null gleich; nehmlich

$P_b = P_a = Q_b = Q_a = R_b = \text{etc.} = 0$;

5) auch die Coefficienten von ψ_2, sowohl für $x_1 = x''$, als auch für $x_1 = x'$, einzeln der Null gleich, nehmlich

$$'P_{x''} = 'P_{x'} = 'Q_{x''} = 'Q_{x'} = 'R_{x''} = \text{etc. etc.} = 0;$$

endlich 6) auch die Coefficienten von $\psi_{x''+x',\, b+a}$ einzeln der Null gleich, nehmlich

$$''P_{x'',\, b} = ''P_{x'',\, a} = ''P_{x',\, b} = ''P_{x',\, a} = ''Q_{x'',\, b} = ''Q_{x',\, a} = \text{etc. etc.} = 0.$$

Beweis. Der erste Theil von W nehmlich $\int_{b \div a}(\int_{x'' \div x'} \psi_3 \cdot \delta y \cdot \partial x_1) \cdot \partial x$ oder $(\int^2 \psi_3 \cdot \delta y . \partial x_1 . \partial x)_{x'' \div x',\, b \div a}$ wird offenbar eine Funktion der constanten Werthe x'', x', b und a und noch der constanten Coefficienten, die in ψ_3 und in δy enthalten seyn können. Aehnliches gilt von dem zweiten und dritten Theile von W.

Denkt man sich also statt δy irgend eine (z. B. ganze) Funktion von x und x_1 gesetzt, mit einer hinlänglichen Anzahl von unbestimmten Constanten, so kann man eine dieser Constanten dazu verwenden, daß die Summe der 3 ersten Theile in W der Null gleich wird, so daß der 4te Theil, nehmlich $\psi_{x''+x',\, b+a}$ noch Null seyn muß, für jeden möglichen Werth der den übrigen in δy noch vorkommenden unbestimmten Constanten gegeben werden mag. Diese Gleichung $\psi = 0$ kann aber für dieses δy unter dieser Voraussetzung nicht existiren, wenn nicht die einzelnen Coefficienten von $(\psi)_{x'' \div x',\, b \div a}$ der Null gleich sind, wie solches aus (§. §. 91. 92.) in Verbindung mit (§. §. 85. seqq.) unmittelbar hervorgeht. Die unter (n. 6.) im Lehrsatze stehende Behauptung ist also außer Zweifel gesetzt.

So wie aber diese Coefficienten von $(\psi)_{x'' \div x',\, b \div a}$ (die von δy ganz unabhängig sind) einzeln Null seyn müssen, so reducirt sich die gegebene Gleichung $W = 0$, nur noch auf

$$7) \quad \int\!\!\int \psi_3 \cdot \delta y \cdot \partial x_1 \cdot \partial x + \int_{b+a} (\psi_2)_{x'' \div x'} \partial x + \int_{x''+x'} (\psi_1)_{b+a} \partial x = 0$$

oder $W' = 0$

welche, da sie keine andere ist, als die Gleichung (n. 2.) (aus welcher jetzt nur die Glieder weggelassen sind, von denen man sich eben überzeugt hat, daß sie unabhängig von δy Null

seyn müssen) wiederum für jede mögliche Funktion von x und x_1 gelten soll, die statt δy gesetzt werden mag.

Sondert man nun von W′ (in n. 7.) irgend eines der in ψ_1 oder ψ_2 enthaltenen Glieder ab, z. B.

$$\int_{b+a} {}'R_{x'} . \left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x_1^2}\right)_{x'} . \partial x$$

welches in dem 2ten Theile von W vorkommen muß, so kann man wiederum für δy irgend eine (z. B. ganze) Funktion von x und x_1 gesetzt denken, und eine der Constanten dazu verwenden, daß alles in W′ zusammen, mit Ausnahme des abgesonderten Gliedes

$$\int_{b+a} {}'R_{x'} . \left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x_1^2}\right)_{x'} . \partial x$$

der Null gleich wird (als Funktion der constanten Ausdrücke x″, x′, b und a, und der in δy enthaltenen unbestimmten Constanten); und es muß also dann

$$\int_{b+a} {}'R_{x'} . \left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x_1^2}\right)_{x'} . \partial x = 0$$

seyn, für dieses δy, aber für jeden Werth der noch unbestimmten Constanten. Und daß dieses nicht anders möglich ist, als wenn der Coefficient ${}'R_{x'} = 0$ ist, wird auf demselben Wege leicht erkannt, der (§. 94.) in einem ähnlichen Falle betreten wurde, welches desto mehr in die Augen fällt, wenn man noch bedenkt, daß $\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x_1^2}\right)_{x'}$ auch bloß als eine (ganze) Funktion von x allein angesehen werden (kann) muß, mit noch hinlänglich (beliebig) viel unbestimmten Constanten. — Was aber für ${}'R_{x'}$ eben nachgewiesen ist, gilt für jeden Coefficienten in dem zweiten und dritten Theile von W, so daß dadurch der (n. 4 und n. 5) ausgesprochene Theil unseres Lehrsatzes als erwiesen erscheint.

Dann reducirt sich aber die Gleichung W=0 der (n. 2.) bloß auf

8) $W'' = \int_{b \div a}(\int_{x'' \div x'} \psi_3 \cdot \delta y \cdot \partial x_1) \cdot \partial x = 0$

welche, da sie wiederum eigentlich keine andere ist, als die Gleichung (n. 2.) (in so ferne wir hier nur die Glieder weggelassen haben, die in (n. 2.) an sich schon Null waren, unabhängig von δy) für jede Funktion von x und x_1 gelten soll, die statt δy gesetzt werden mag. — Gesetzt nun, es wäre nicht $\psi_3 = 0$, so könnte man $\delta y = \frac{1}{\psi_3}$ setzen, und erhielte dann aus (n. 8.):

$$W'' = \int_{b \div a}(\int_{x'' \div x'} \partial x_1) . \partial x = \int_{b \div a}(x_1)_{x'' \div x'} . \partial x = \int_{b \div a}(x'' - x') . \partial x$$
$$= (x'' - x') \int_{b \div a} . \partial x = (x'' - x') . x_{b \div a} = (x'' - x')(b - a)$$
$$= 0,$$

welches offenbar nicht möglich ist, so lange (was hier allemal vorausgesetzt wird) x'' von x' und b von a verschieden seyn werden. — Und da also die Annahme, daß ψ_3 nicht Null ist, zu einem Widerspruche führt, so muß auch $\psi_3 = 0$ seyn; wie solches in (n. 3.) unseres Lehrsatzes behauptet wurde.

§. 99. Zusatz.

Sollten zwischen $(\delta y)_{x'', b}$, $(\delta y)_{x'', a}$, $(\delta y)_{x', b}$, $(\delta y)_{x', a}$, $\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)_{x'', b}$ etc. etc. etc. $\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x_1}\right)_{x'', b}$, $\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x_1}\right)_{x'', a}$ etc. etc., u. s. w. f., noch Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. etc. gegeben seyn, so daß die Gleichung $W = 0$ nicht für jedes beliebige δy, sondern nur für alle diejenigen δy gelten soll, welche den Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$; etc. etc. genügen, so müßte man sich dieser Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. in so ferne sie von lineärer Form wären, bedienen, um eben so viele der von δy abhängigen Ausdrücke aus W zu eliminiren, welche Elimination jedoch nur den vierten Theil ψ von W betreffen könnte; und dann müßten noch immer (n. n. 3. 4. 5.) unsers Lehrsatzes unverändert statt haben, während die (n. 6.) desselben, sich nur auf das durch die Elimination veränderte ψ beziehen würde.

Um also hier die Gleichungen zu erhalten, in welche die gegebene $W=0$ zerfällt, müßte man auch hier die Gleichung $W+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\ldots=0$ sich bilden, auf diese die (n. n. 3. 4. 5 und 6.) unsers Lehrsatzes anwenden, zuletzt aber die unbestimmten λ, λ_1 etc. etc. (welche unter dem Integralzeichen nicht vorkommen können) eliminiren.

§. 100. Lehrsatz.

Ist aber W der Ausdruck des (§. 80. Auflösung II. n. 16.) nehmlich

$$1)\quad W=(\psi_{x''\div x'})_{b\div a}-\int_{b\div a}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)_{x''}.\frac{\partial x''}{\partial x}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)_{x'}.\frac{\partial x'}{\partial x}\right].\partial x$$

$$+\left(\int_{x''\div x'}\psi_1\partial x_1\right)_{b\div a}-\int_{b\div a}\left[(\psi_1)_{x''}.\frac{\partial x''}{\partial x}-(\psi_1)_{x'}.\frac{\partial x'}{\partial x}\right].\partial x$$

$$+\int_{b\div a}(\psi_2)_{x''\div x'}.\partial x+\int_{b\div a}\left(\int_{x''\div x'}\psi_3\delta y.\partial x_1\right)\partial x,$$

wo ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 ganz die Bedeutung des (§. 98.) oder der (Anmerkung 2. §. 80.) haben, und wo x'' und x' Werthe von x_1 zugleich aber selbst noch Funktionen von x sind, wo endlich b und a Werthe von x vorstellen; und hat man abermals gegeben:

$$2)\quad W=0,$$

für jedes δy, so muß auch wiederum seyn:

$$3)\quad \psi_3=0,$$

4) alle Coefficienten von ψ_1, einzeln $=0$; nehmlich

$$P=0,\ Q=0,\ \text{etc. etc.};$$

5) alle Coefficienten von ψ_2 sowohl für $x=b$, als auch für $x=a$ einzeln $=0$; nehmlich

$$'P_b='P_a='Q_b='Q_a=\text{etc. etc.}=0;$$

und 6) alle Coefficienten von $(\psi_{x''\div x'})_{b\div a}$ einzeln der Null gleich; nehmlich

$$(''P_{x''})_b\,{}^{*)}=(''P_{x''})_a=(''P_{x'})_b=(''P_{x'})_a=''(Q_{x''})_b=\text{etc.}=0.$$

---

*) Die Ausdrücke $('P_{x''})_b$ etc. etc. unterscheiben sich aber von den Ausdrücken $''P_{x''}, {}_b$, etc. des (§. 98.) dadurch, daß in den ersteren, während

Beweis ganz dem (§. 98.) geführten analog.

Anmerkung. Es mag genügen, den Weg bezeichnet zu haben, auf welchen dergleichen Untersuchungen weiter fortgesetzt oder gegebenen besondern Fällen angepaßt werden können. — Wir wenden uns daher hier noch zu einer anderen Gattung von Sätzen, die den Beschluß dieser Einleitung bilden sollen.

§. 101. Bemerkung.

Zu einer Differentialgleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y nach x genommen (also y als Funktion von x betrachtet), von der n^{ten} Ordnung, gehört eine vollständige oder allgemeine Integralgleichung (oder Integral) mit n willkührlichen und allgemeinen Constanten; außerdem aber kann der Gleichung genügt werden durch singuläre Integrale oder singuläre Werthe (welche zu unterscheiden sind von den besonderen (partikulären) Integralen d. h. von denjenigen Integralen, welche aus dem allgemeinen oder vollständigen Integrale für besondere (constante) Werthe der willkührlichen Constanten hervorgehen) mit einer geringern Zahl von willkührlichen Constanten, und die nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind, obgleich sie aus diesem letzteren dadurch gefunden werden können, daß man die willkührlichen Constanten selbst wieder als Funktionen von x sich denkt, so genommen, daß der Differentialgleichung genügt werden muß. (M. s. La grange, Léçons sur le Calcul des fonctions 1806. Leç. XIV.) — Mit diesen singulären Werthen werden wir uns im Verlaufe dieser Schrift so gut wie gar nicht befassen.

§. 102. Aufgabe.

Es sind gegeben zwei Gleichungen $\psi = 0$ und $\psi_1 = 0$ zwischen x und y und z, beide letztere als Funktion von x

---

b statt x geschrieben wird, das x'', welches zuvor statt x_1 gesetzt worden, als Funktion von x, selbst in $x''b$ übergeht, während in den letzteren dieses x'' unverändert bleibt.

betrachtet, und zwischen den Ableitungen von y und z nach x genommen. Man soll für y und z die vollständigen Integrale mit allen willkührlichen Constanten finden.

Auflösung. Die erste Gleichung $\psi=0$ sey nach y von der m^{ten}, nach z aber von der n^{ten} Ordnung; die zweite Gleichung $\psi_1=0$ dagegen sey nach y von der p^{ten}, nach z von der q^{ten} Ordnung. Um nun z mit allen seinen Ableitungen zu eliminiren, differenzire man die Gleichung $\psi=0$, q mal hinter einander, so wie die andere $\psi_1=0$, n mal hintereinander, und eliminire dann aus den $q+n+2$ Gleichungen

$$\psi=0,\ \partial\psi=0,\ \partial^2\psi=0, \ldots \partial^q\psi=0$$

und $$\psi_1=0,\ \partial\psi_1=0,\ \partial^2\psi_1=0, \ldots \partial^n\psi_1=0,$$

die $q+n+1$ Veränderlichen $z, \partial z, \partial^2 z, \partial^3 z, \ldots \partial^{n+q} z$, so bleibt eine Eliminations-Gleichung $\pi=0$ bloß in x und y und dessen Ableitungen, entweder von der $m+q^{ten}$ oder von der $n+p^{ten}$ Ordnung, je nachdem $m+q$ oder $n+p$ die größere Zahl ist. Diese Eliminations-Gleichung $\pi=0$ giebt dann, wenn man solche integrirt, y mit $m+q$ (wenn $m+q>n+p$) willkührlichen Constanten in x ausgedrückt, und dieser Werth von y in die beiden gegebenen Gleichungen $\psi=0$ und $\psi_1=0$ substituirt, giebt zwei Gleichungen zwischen x, z und den Ableitungen von z, und aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich dann z ohne Integration, indem man beide bloß so oft differentiirt, bis man so viel Differential-Gleichungen hat, um alle Ableitungen von z eliminiren zu können, und so in der Endgleichung z allein in x ausgedrückt zu erhalten. Es wird also z nicht mehr neue willkührliche Constanten aufnehmen, als in y schon enthalten sind; folglich werden y und z in x ausgedrückt seyn mit $m+q$ oder $n+p$ willkührlichen Constanten, je nachdem

$$m+q>n+p \quad \text{oder} \quad n+p>m+q \quad \text{ist.}$$

Anmerkung. Eigentlich muß man so schließen: Alle gesuchten Funktionen von x, für y und für z, welche den Gleichungen $\psi=0$ und $\psi_1=0$ genügen, müssen auch alle ihre Ableitungsgleichungen und daher

auch alle aus diesen Gleichungen durch Elimination erhaltenen, folglich auch die Gleichung $\pi=0$ (die z gar nicht mehr enthält) identisch machen; alle gesuchten Werthe von y müssen daher unter allen denen gewiß enthalten seyn, welche aus der Integration der Gleichung $\pi=0$ sich ergeben. Integrirt man also $\pi=0$ und setzt den mit der gehörigen Zahl von willkührlichen Constanten in x gefundenen Werth von y statt y in die Gleichungen $\psi=0$ und $\psi_1=0$, so kommt alles nur noch darauf an, alle Werthe von z zu finden, welche den nun nicht mehr y enthaltenden Gleichungen $\psi=0$ und $\psi_1=0$ zugleich genügen. Alle diese Werthe von z, werden aber auch allen Ableitungsgleichungen und daher auch den durch Elimination erhaltenen, mithin auch der letzt erhaltenen Gleichung genügen müssen (die bloß z noch und keine Ableitung von z mehr enthält), folglich nothwendig unter den Werthen von z enthalten seyn, welche letztere liefert. — Eher könnte daher in besonderen Fällen die Zahl der Constanten geringer werden, in keinem Falle aber größer als $m+p$ oder $n+q$.

§. 103. Zusatz.

Ist $m=n$ und $p=q$, d. h. ist die erste Gleichung $\psi=0$ in Bezug auf y und z von derselben (m^{ten}) Ordnung, eben so die zweite Gleichung $\psi_1=0$ von derselben (p^{ten}) Ordnung nach y und nach z, so ist auch

$$m+q=n+p=m+p;$$

und es ist also dann y und z in x ausgedrückt mit höchstens $m+p$ willkührlichen Constanten.

§. 104. Zusatz.

Es ist nun leicht, wenn 3 Gleichungen

$\psi=0,\ \psi_1=0,\ \psi_2=0$ gegeben sind, zwischen x, und y, z, u als Funktionen von x, und den Ableitungen dieser letztern, nach x genommen, durch ein ähnliches Verfahren z und u nebst allen Ableitungen derselben zu eliminiren, und so zu einer Gleichung zu gelangen, welche ausser x, nur noch y und deren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung enthält, und welche integrirt, die möglicherweise eingehende Zahl der willkührlichen Constanten liefert; weil, wenn man y in x nebst den willkührlichen Constanten ausgedrückt hat, die-

ser Werth statt y nur gesetzt werden darf, um eine beliebige Menge von Gleichungen zu haben, aus denen z und u ohne Integration, sondern bloß durch Elimination aller Ableitungen von z und u, und u oder z selbst ebenfalls in x und denselben Constanten zu erhalten, die schon in y vorkamen.

In der Folge hat für uns vorzüglich der Fall Interesse, wo

die Ordnung	nach y;	nach z,	nach u
von $\psi = 0$,	die $2m^{te}$,	die $m+n^{te}$,	die $m+p^{te}$
von $\psi_1 = 0$,	die $m+n^{te}$,	die $2n^{te}$,	die $n+p^{te}$
von $\psi_2 = 0$,	die $m+p^{te}$,	die $n+p^{te}$,	die $2p^{te}$ ist,

und wo wir annehmen, daß p nicht kleiner als m und auch nicht kleiner als n ist. Differentiirt man hier $\psi = 0$ hintereinander $n+3p$ mal, und $\psi_1 = 0$ noch $m+3p$ mal, und $\psi_2 = 0$ auch $m+n+2p$ mal hintereinander, so hat man in Allem $2m+2n+8p+3$ Gleichungen, in denen die höchste Ordnung der Ableitungen

	nach y,	z,	u
die	$2m+n+3p^{te}$,	$m+2n+3p^{te}$,	$m+n+4p^{te}$ ist.

Aus diesen $2m+2n+8p+3$ Gleichungen kann man nun eliminiren, einmal die $m+n+4p+1$ von u abhängigen, dann die $m+2n+3p+1$ von z abhängigen Ausdrücke, und zuletzt noch $-n+p$ der höchsten Ableitungen von y, zusammen $2m+2n+8p+2$ Ausdrücke, so daß dann nur eine einzige Gleichung bleibt, welche bloß noch ausser x, das y enthält, nebst dessen Ableitungen bis zur $(2m+n+3p)-(-n+p)^{ten}$ d. h. bis zur $2m+2n+2p^{ten}$ Ordnung. Die Integration wird daher y, und dann auch z und u mit nicht mehr als $2m+2n+2p$ willkührlichen Constanten geben.

Anmerkung. Es ist auch leicht zu sehen, wie der Schluß und das Resultat dieselben bleiben, wenn n oder m als die größere der Zahlen m, n, p angesehen würden.

§. 105. Zusatz.

Sind gegeben 4 Gleichungen

$$\psi = 0, \ \psi_1 = 0, \ \psi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \psi_3 = 0,$$

zwischen x, und y, z, u, v als Funktionen von x, und den Ableitungen dieser 4 letztern nach x genommen, und zwar ist

die Ordnung		nach y,	nach z,	nach u,	nach v
von $\psi = 0$,	die	$2m^{te}$,	$m+n^{te}$,	$m+p^{te}$,	$m+q^{te}$
von $\psi_1 = 0$,	die	$m+n^{te}$,	$2n^{te}$,	$n+p^{te}$,	$n+q^{te}$
von $\psi_2 = 0$,	die	$m+p^{te}$,	$n+p^{te}$,	$2p^{te}$,	$p+q^{te}$
von $\psi_3 = 0$,	die	$m+q^{te}$,	$n+q^{te}$,	$p+q^{te}$,	$2q^{te}$

so erhält man ganz auf demselben Weg y, z, u und v mit $2m+2n+2p+2q$ willkührlichen Constanten. *)

Leicht ist es ein ähnliches Resultat in ähnlichem Falle bei 5 und mehr gegebenen Gleichungen zu erhalten.

---

*) In der: „Analytischen Darstellung der Variationsrechnung. Berlin 1823. p. 156. seqq." ist für denselben Fall, unter der Voraussetzung, daß q die größeste der Zahlen m, n, p, q seyn soll, die Zahl der durch die Integration eingehenden willkührlichen Constanten $= m+n+p+5q$ gefunden, also zu groß. Die Folgerung, die daselbst aus diesem Resultat gezogen wurde, daß nehmlich die dortige Aufgabe des Maximum und Minimum unbestimmt sey, scheint deshalb nicht zugelassen werden zu können.

Variations-Rechnung.

Variations-Rechnung.

§. 1. Lehrsatz.

Wie auch V aus $a, b, \dots x, y, z,$ etc. zusammengesetzt seyn mag, wenn $a_\varkappa, b_\varkappa, \dots x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa$ etc. beliebige nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende unendliche Reihen vorstellen, deren erste Glieder beziehlich $a, b, \dots x, y, z,$ etc. selbst wieder sind (so daß $a_\varkappa, b_\varkappa, \dots x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa$, etc. für $\varkappa = 0$ in beziehlich $a, b, \dots x, y, z,$ etc. etc. selbst wieder übergehen), und wenn nun diese Reihen

$a_\varkappa, b_\varkappa, \dots x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa,$ etc. etc. in V beziehlich statt $a, b, \dots x, y, z,$ etc. gesetzt werden, so geht dadurch, in so ferne $a, b, \dots x, y, z,$ etc. ganz allgemein und nicht besondere Werthe habend gedacht werden, V selbst allemal nothwendig in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe über, deren erstes Glied V selbst ist, die also für $\varkappa = 0$ sich auf V selbst wiederum zurückzieht. (Vergl. E. §. 35.).

Der Beweis wird aus der Differential-Rechnung als bekannt vorausgesetzt. *)

*) In dem dritten Theile des „Lehrbuchs d. Arithm. Alg. und Analys." T. I. und II. 1822. welcher (nebst dem 4ten Theile) nächstens durch den Druck bekannt gemacht werden kann, ist von diesem wichtigen Satze ein möglichst genügender Beweis zu geben versucht worden.

§. 2. Zusatz.

Derselbe Satz gilt natürlich auch noch, wenn z. B. y, z, etc. selbst wieder Funktionen von a, x, etc. etc. seyn sollten, weil, indem dann a_{x}, x_{x}, etc. etc. statt a, x etc. etc. gesetzt würden, die y, z etc. etc. selbst schon (nach §. 1.) in, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen übergehen, man möchte ausserdem schon vorher y_{x}, z_{x}, etc. statt y, z, etc. gesetzt haben oder nicht, in so ferne im erstern Falle

$$y_{x} = y + x \cdot y_1 + x^2 \cdot y_2 + \text{etc. etc. etc.}$$

$$z_{x} = z + x \cdot z_1 + x^2 \cdot z_2 + \text{etc. etc. etc.}$$

u. s. w. f. seyn würde, wo y_1, y_2, etc. so wie y, und z_1, z_2, etc. etc. so wie z, selbst noch als (beliebige) Funktionen von a, x, etc. etc. gedacht werden könnten, deren jede (nach §. 1.) abermals in eine nach ganzen Potenzen von x fortgehende unendliche Reihe übergehen müßte, sobald a, x, etc. etc. in a_{x}, x_{x}, etc. etc. übergehend gedacht würden.

Anmerkung. So wie aber a, b, etc. x, y, z, etc. nicht mehr allgemein, sondern bereits als besondere Werthe habend gedacht würden, so hörte der Satz (§. 1.) und der dazu gehörige (§. 2.) auf, nothwendig wahr zu seyn, weil dann in (§. 1.) das neue V auch nach gebrochenen, oder negativen, ja auch gar nicht nach Potenzen von x fortgehen, während in (§. 2.) dasselbe schon mit dem neuen y, z, etc. und auch mit V der Fall seyn könnte. — Hier ist immer nur von dem in (§. 1. und §. 2.) gedachten allgemeinen Falle die Rede.

§. 3. Erklärung.

Wenn ein solcher Ausdruck, a, b, ... x, y, z, etc. oder V, für sich und unabhängig von einem andern, in eine nach ganzen Potenzen von x fortgehende Reihe übergehend gedacht wird, so heißt er „durch x unmittelbar variirt"; geht er aber nur dadurch in die gedachte unendliche Reihe über, daß ein anderer, von welchem er Funktion ist, oder mehre andere, von denen er als Funktion angesehen wird, in solche unendliche Reihen übergehen (wie im §. 1. und

§. 2. das V, und im §. 2. das y, z, etc. etc.) so heißt er „durch $\varkappa$ mittelbar variirt" und er ist „durch $\varkappa$ mittelbar und unmittelbar zugleich variirt" wenn er (wie im (§. 2.) die y, z, etc.) zuerst unmittelbar variirt gedacht wird, und dann in einigen oder in allen seinen Theilen, einige oder alle der vorkommenden Ausdrücke selbst noch in solche unendliche Reihen übergehen.

Den nach ganzen positiven Potenzen von $\varkappa$ fortgehenden Reihen, die wir beziehlich statt der absolut unabhängigen Veränderlichen, a, x, etc. setzen, oder die statt der relativ unabhängigen y, z, etc., oder auch statt der abhängig Veränderlichen V, gesetzt werden müssen, kann man allemal die Form

$$a + a_1 . \varkappa + a_2 . \frac{\varkappa^2}{2!} + a_3 . \frac{\varkappa^3}{3!} + \text{etc. etc.} \quad (\text{E. §. 28.})$$

oder $$x + x_1 . \varkappa + x_2 . \frac{\varkappa^2}{2!} + x_3 . \frac{\varkappa^3}{3!} + \text{etc. etc.}$$

u. s. w.

oder $$y + y_1 . \varkappa + y_2 . \frac{\varkappa^2}{2!} + y_3 . \frac{\varkappa^3}{3!} + \text{etc. etc.}$$

oder $$z + z_1 . \varkappa + z_2 . \frac{\varkappa^2}{2!} + z_3 . \frac{\varkappa^3}{3!} + \text{etc. etc.}$$

u. s. w.

oder $$V + V_1 . \varkappa + V_2 . \frac{\varkappa^2}{2!} + V_3 . \frac{\varkappa^3}{3!} + \text{etc. etc.}$$

geben; wo, wenn die Variation eine unmittelbare ist (wie z. B. die von a, x, etc. seyn soll), die Coefficienten

a_1, a_2, a_3, etc. x_1, x_2, x_3, etc. u. s. w. ganz beliebig seyn können; während, wenn die Variation mittelbar ist (wie im (§. 2.) die von y, z, etc. oder jedesmal die von V), die Coefficienten

y_1, y_2, y_3, etc. z_1, z_2, z_3, etc. etc. V_1, V_2, etc. etc. von den erstern abhängig seyn werden.

Diese Coefficienten nun nennt man Variations-Coef-

ficienten (oder auch wohl schlechthin 1te, 2te, etc. etc. Variationen, welche dann jedoch von der kurz vorher definirten Gesammt-Variation unterschieden werden müssen), und es ist gebräuchlich, sie nicht, wie hier oben, durch

$$a_1, a_2, a_3, \text{etc. } y_1, y_2, \text{etc., } V_1, V_2, \text{etc.}$$

sondern beziehlich durch

$$\delta a, \delta^2 a, \text{etc., } \delta y, \delta^2 y, \text{etc. etc., } \delta V, \delta^2 V, \text{etc. etc.}$$

zu bezeichnen, weshalb wir diese letztere Bezeichnung ebenfalls hier beibehalten wollen.

Weil aber eine Funktion z. B. y, eine unmittelbare oder eine mittelbare oder eine unmittelbare und zugleicher Zeit auch eine mittelbare Gesammt-Variation erleiden kann, so wird sie in jedem der beiden letztern Fälle in eine andere unendliche Reihe übergehen als in dem erstern Falle. Diese verschiedenen unendlichen Reihen werden wir zwar immer auf dieselbe eben definirte Weise andeuten, jedoch sie dadurch von einander absondern, daß wir die Coefficienten der einen durch ein bloßes δ, der andern dagegen durch, mit Strichen oder sonstigen Abzeichen versehene δ (die jedesmal der variirten Funktion, wie eben erklärt wurde, vorgesetzt werden) ausdrücken; aber die nähere Bestimmung darüber dem jedesmal zu behandelnden besonderen Falle überlassen. — Die Gesamt-Variation einer solchen Funktion y, also die unendliche nach ganzen positiven Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihe selbst, werden wir dagegen einmal durch $y_\varkappa$ (wie bereits in den (§. §. 1. und 2.) geschehen ist) oder auch durch $y_{(\varkappa)}$ vorstellen, je nachdem eine einfache oder eine doppelte Variation statt gefunden hat; die nähere Bestimmung jedoch ebenfalls jedem besonderen Falle noch überlassen.

Endlich denken wir uns im Verlaufe dieses ganzen Werkes alle in einer unmittelbaren Variation eines Ausdrucks a oder x, etc. eingehenden Variations-Coefficienten

$$\delta a, \delta^2 a, \text{etc. etc. oder } \delta x, \delta^2 x, \text{etc. etc., etc. etc.,}$$

mit den Ausdrücken a oder x, etc. zu denen sie beziehlich

gehören, in so ferne jedesmal **gleichartig**, als wir z. B. δa, $\delta^2 a$, etc. mit a zugleich als constant, oder mit a zugleich als Funktionen genau derselben Veränderlichen uns denken, im Allgemeinen.

Anmerkung 1. Aus der Art, wie die Variations-Coefficienten der mittelbar variirten Funktionen aus denen der unmittelbar variirten gefunden werden, wird aber in der Folge hervorgehen, daß, **unter dieser ein für allemal für die unmittelbaren Variations-Coefficienten gemachten Voraussetzung**, auch die mittelbaren Variations-Coefficienten dieselbe Eigenschaft haben müssen, nehmlich mit der Funktion, zu welcher sie gehören (z. B. δy, $\delta^2 y$, etc. mit y), zugleich als Funktionen genau derselben Veränderlichen angesehen werden zu müssen, im Allgemeinen.

Anmerkung 2. Die Bezeichnung $a_\varkappa$, $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $V_\varkappa$, und dergleichen kann mit der (E. §. 34.) angegebenen deshalb nie in Collision kommen, einmal weil im Verfolge des ganzen Werkes immer nur durch denselben Buchstaben $\varkappa$ variirt wird, und $\varkappa$, so oft er vorkommt, allemal eine statt gehabte Variation anzeigen soll; dann aber auch nicht, weil so oft die Zeichen y_b, y_a, etc. etc. im Sinne des (E. §. 34.) genommen werden sollen, allemal besonders noch angegeben werden muß, für welche in y enthaltene absolut Veränderliche die Werthe b, a, etc. gesetzt werden sollen. — Aus diesem letzteren Grunde werden wir uns in der Folge auch noch solcher Zeichen, wie y_1, y_2, y_3, etc. z_1, z_2, z_3, etc. bedienen, ohne uns weder eine stattgehabte Variation (die immer durch $\varkappa$ angedeutet wird) dabei zu denken, noch diese Zeichen im Sinne der (E. §. 34.) zu nehmen (in so ferne nicht besonders noch angegeben werden wird, von welchen absolut Veränderlichen diese angehängten 1, 2, 3, etc. Werthe seyn sollen).

Anmerkung 3. Nach Euler's *) und Lagrange's **) Erklärungen ist unter dem **unmittelbar variirten** V, eine Funktion von $\varkappa$ zu verstehen, welche für $\varkappa = 0$ in V wiederum zurückgeht. — Dieser Begriff ist etwas weiter, als der hier von uns aufgestellte, weil er überhaupt die Reihe

---

*) Novi Comment. Acad. Petrop. T. XVI, p. 35.

**) Leçons sur le Calcul d. fonctions, 1806. Leç. XXII.

$$V + \varkappa^{\mu}.V_1 + \varkappa^{\nu}.V_2 + \text{ etc. etc. etc.}$$

in sich schließt, sie mag nach ganzen oder auch nach gebrochenen positiven Potenzen von $\varkappa$ fortgehen. Der Verfolg dieser Abhandlung wird lehren, daß unser Begriff ausreicht, übrigens etwas bequemer ist.

Viel zu enge dagegen ist der von einigen der neuesten Schriftsteller aufgestellte Begriff der Variation, nach welchem eine unmittelbar variirte Funktion $\left\{\begin{matrix} \varphi(x) \\ \text{oder } y \end{matrix}\right\}$ bloß von der Form $\left\{\begin{matrix} \varphi(x) + \varkappa.\psi(x) \\ \text{oder } y + \varkappa.\ \delta y \end{matrix}\right\}$ angenommen wird, nach welchem also unsere $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. alle, $=0$ gedacht werden. — So wie nehmlich zwischen y und z die Gleichung $F(y, z)=0$ gegeben ist, die auch in dem variirten Zustand noch statt finden soll, so können bekanntlich y und z nicht zu gleicher Zeit in

$y+\varkappa.\delta y$, und $z+\varkappa.\delta z$ übergehen (wenn δy und δz von $\varkappa$ unabhängige Ausdrücke seyn sollen) weil (nach dem Taylor'schen Lehrsatze), während y in die Form $y+\varkappa.\delta y$ übergeht, dann z nothwendig in eine nach ganzen positiven Potenzen von $\varkappa$ fortgehende unendliche Reihe übergehen muß. Ja, sind y und z noch Funktionen von x, und soll die Gleichung $F(y, z)=0$ gar nicht für jedes x, sondern nur für einen einzigen (Grenz-) Werth von x, z. B. für $x=a$ existiren, also nur

$F(y_a, z_a)=0$ statt haben, auch noch im variirten Zustande von y und z, so wird, weil wenigstens für $x=a$, sobald y in $y+\varkappa.\delta y$ übergegangen ist, das neue z in eine unendliche Reihe übergehen muß (im Allgemeinen, versteht sich) z nicht bloß in $z+\varkappa.\delta z$ übergehen können. — Nun erfordert es aber die so wichtige Allgemeinheit der Untersuchungen, daß man in jedem solchen Falle zunächst unentschieden noch lasse, welcher der beiden Veränderlichen y oder z als der absolut unabhängige angesehen werden soll; folglich würde man in jedem Falle gegen diese Allgemeinheit verstoßen, wenn man auch nur einem der beiden Veränderlichen z. B. dem y in seinem variirten Zustande die bloße Form $y+\varkappa.\delta y$ beilegen wollte. — Wenn endlich dieselben Schriftsteller, in demselben oben erwähnten Falle (wo entweder zwischen y und z die Gleichung $F(y, z)=0$ statt haben soll, oder wo für einen bestimmten (Grenz-) Werth von x z. B. für $x=a$, die Gleichung $F(y_a, z_a)=0$ gegeben ist) doch die Variationen von y und z zugleich bloß unter den Formen $y+\varkappa.\delta y$ und $z+\varkappa.\delta z$ annehmen und dabei so wohl δy als auch δz als von $\varkappa$ unabhängig behandeln, so muß sich dieser Widerspruch in dem Princip zwar nicht (wie man bald übersieht) bei den ersten Variations-Coefficienten, aber wohl jedesmal bei den zweiten und folgenden, in den daraus hervorgehenden unvollkommenen und unrichtigen Resultaten, nothwendig bemerklich machen, also namentlich in der Lehre vom Maximum

oder Minimum allemal da, wo das Maximum von dem Minimo unterschieden werden soll. — Indem wir aus diesen Gründen nothgedrungen unsern weitern Begriff der Variation beibehalten müssen, bleibt uns doch noch immer vorbehalten, in jeder besondern Untersuchung von einem gewissen Punkte ab, die unabhängigen absolut Veränderlichen herauszusuchen, und für sie die zweiten und höhern Variations-Coefficienten, wenn solches die übrigen Umstände dieses besondern Falles gestatten, alle der Null gleich zu setzen. *)

§. 4. Lehrsatz.

Die einzelnen Variations-Coefficienten δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$,... und allgemein $\delta^n V$, einer auf irgend eine gegebene Weise variirten Funktion V, die durch $V_\varkappa$ bezeichnet seyn mag, werden gefunden, wenn man $\frac{\partial . V_\varkappa}{\partial \varkappa}$, $\frac{\partial^2 . V_\varkappa}{\partial \varkappa^2}$, $\frac{\partial^3 . V_\varkappa}{\partial \varkappa^3}$... und allgemein $\frac{\partial^n . V_\varkappa}{\partial \varkappa^n}$ entwickelt, und in jeder dieser Ableitungen nach beendigter Differentiation Null statt $\varkappa$ schreibt.

Beweis 1. Denn $V_\varkappa$ ist eine Funktion von $\varkappa$, die für $\varkappa = 0$ in die gegebene Funktion V wieder übergeht. Es läßt sich also $V_\varkappa$ nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze (E. §. 38.) in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe verwandeln, so daß

$$V_\varkappa = (V_\varkappa)_0 + \left(\frac{\partial . V_\varkappa}{\partial \varkappa}\right)_0 . \varkappa + \left(\frac{\partial^2 V_\varkappa}{\partial \varkappa^2}\right)_0 . \frac{\varkappa^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 . V_\varkappa}{\partial \varkappa^3}\right)_0 . \frac{\varkappa^3}{3!} + \text{etc.}$$

ist, während der Coefficient von $\frac{\varkappa^n}{n!}$ die Ableitung $\left(\frac{\partial^n . V_\varkappa}{\partial \varkappa^n}\right)_0$ seyn wird, wo 0 ein Werth von $\varkappa$ (E. §. 34.).

Beweis 2. Es ist nach (§. 3.)

$$V_\varkappa = V + \delta V . \varkappa + \delta^2 V . \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V . \frac{\varkappa^3}{3!} + \ldots$$

folglich wenn man nach $\varkappa$ differentiirt:

---

*) Man vergleiche Annales de Math. pures et appliquées T. XIII. Nismes. 1822 und „Analytische Darstellung der Variationsrechnung." Berlin 1823.

$$\frac{\partial . V_\varkappa}{\partial \varkappa} = \delta V + \delta^2 V . \varkappa + \delta^3 V . \frac{\varkappa^2}{2!} + \ldots$$

und dieses nochmal nach $\varkappa$ differentiirt:

$$\frac{\partial^2 . V_\varkappa}{\partial \varkappa^2} = \delta^2 V + \delta^3 V . \varkappa + \text{etc.} \ldots$$

u. s. w. f.

Setzt man nun $\varkappa = 0$, so ergiebt sich unser Lehrsatz.

Anmerkung 1. Bedient man sich des (E. §. 30.), so hat man

$$V_\varkappa = S . \left[\left(\frac{\partial^a V_\varkappa}{\partial \varkappa^a} \right)_0 . \frac{\varkappa^a}{a!} \right] \text{ oder } V_\varkappa = S \left[\delta^a V . \frac{\varkappa^a}{a!} \right].$$

Im Anhange soll dieser Satz benutzt werden, um dadurch, daß wir unmittelbar $V_\varkappa$ in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihe verwandeln, und den Coefficienten von $\frac{\varkappa^n}{n!}$ derselben nehmen, unmittelbar $\delta^n V$ zu finden, ohne durch fortgesetzte Differentiation nach $\varkappa$ dazu gelangen zu müssen.

Anmerkung 2. Zugleich mag man nicht aus der Acht lassen, wie aus dieser Entwicklung von δV, $\delta^2 V$, etc. etc. mit Nothwendigkeit hervorgeht, daß diese Variations-Coefficienten δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc., wie sie auch von andern abhängig seyn mögen, doch nothwendig immer mit V selbst, als Funktionen genau derselben Veränderlichen angesehen werden müssen, im Allgemeinen, sobald nur nach (§. 3.) allen unmittelbar eingehenden Variations-Coefficienten, in Bezug auf die Veränderlichen, zu denen sie gehören, dieselbe Eigenschaft zukommt.

§. 5. Zusatz 1.,

nach welchem allein die Variationen jeder Ordnung mechanisch hingeschrieben werden können.

Da nach (§. 3 und §. 4.) die δ nichts anders als eine Differentiation nach dem (neuen) Veränderlichen $\varkappa$ andeuten, und nur der einzige Unterschied statt findet, daß man in allen Endresultaten (aber nicht früher) $\varkappa = 0$ gesetzt denkt, wodurch das bereits beendigte Geschäft des Differentiirens keine Aenderung erleidet, so können die Regeln für die Auffindung der Variations-Coefficienten, natürlich auch nicht von denen des Differentiirens abweichen. —

Für das bequemere praktische Arbeiten hat man sich daher die Regel zu merken: „unter jedem Ausdruck V sich das „durch Variation erhaltene $V_\varkappa$, dieses nach $\varkappa$ differentiirt, „und nur in den Endresultaten $\varkappa=0$ gesetzt zu denken," während man sich, so lange operirt wird, unter δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. etc. δV, $\delta^2 V$, etc. etc. jedesmal die Differential-Coefficienten (Ableitungen) nach $\varkappa$, von $y_\varkappa$ oder $V_\varkappa$ etc. vorgestellt denken kann, ohne daß schon $\varkappa=0$ gesetzt wäre.

In diesem letztern Sinne ist also auch:

$$\delta^{\mu+\nu} V = \delta^{\mu} \, (\delta^{\nu} V).$$

Anmerkung. Während eine Funktion $V_\varkappa$ nach $\varkappa$ differentiirt wird, kommen nicht lauter Ableitungen nach $\varkappa$, sondern auch solche nach x, y, etc. genommen, vor. Für diese letztern darf aber nicht δ statt ∂ geschrieben werden, obgleich man solches bei Schriftstellern findet, und das Verfahren selbst sich in einigen Fällen gewissermaßen mag rechtfertigen lassen.

§. 6. Zusatz 2.

Verbindet man mit dem vorhergehenden, die Sätze (E. §. §. 52—59.) nach welchen die Folge der Differentiation und Integration nach mehren von einander unabhängigen Veränderlichen gleichgültig ist, so folgt noch:

$$\delta^{\mu} \cdot \frac{\partial^{m+n+p+\cdots} V}{\partial x^m . \partial y^n . \partial z^p \ldots} = \frac{\partial^{m+n+p\cdots} (\delta^{\mu} V)}{\partial x^m . \partial y^n . \partial z^p \ldots},$$

es mögen m, n, p, etc. beliebige positive oder negative ganze Zahlen seyn, wenn nur in dem letztern Falle die Integrale unter den daselbst angegebenen Einschränkungen genommen werden.

Vorzüglich mögen wir die beiden besondern Fälle berücksichtigen 1) wo $\mu=1$ und $m=-1$, und 2) wo $\mu=1$, und $m=n=-1$, die übrigen der Ausdrücke m, n, p, etc. aber jedesmal Null sind. — Der erste dieser Fälle kann auch so geschrieben werden:

$$1) \quad \delta \int V \partial x = \int (\delta V) . \partial x,$$

wenn nur die Integrale jedesmal zwischen denselben von $\varkappa$ unabhängigen Grenzen genommen werden. Der andere Fall kann dagegen diese Form erhalten:

$$2) \quad \delta . \int^2 V \partial y . \partial x = \int^2 (\delta V) . \partial y . \partial x,$$

und es können bei der ersten Integration nach y, die Grenzen zwischen denen das Integral genommen werden soll, noch von x abhängig gedacht, aber dann die Folge der beiden Integrationen nicht verändert werden.

Anmerkung. Hiermit ist aber die Variationsrechnung im Wesentlichen beendigt und nur in dem Anhange soll für Liebhaber eines allgemeinen Kalkuls noch die n^{te} Variation eines beliebigen Ausdrucks V entwickelt dargestellt werden. — Der später folgenden Anwendungen wegen, mag es uns hier bloß noch erlaubt seyn, die Entwicklung der Variationen der 1sten und 2ten Ordnung nach dem (§. 5.), in den am häufigsten vorkommenden Fällen einzuüben, und zu dem Ende noch folgende Aufgaben als Beispiele hinzuzufügen. *)

§. 7. Aufgabe 1.

Es ist $V = f(x, y)$ und $V_\varkappa = f(x, y_\varkappa)$ gegeben, wo $f(x, y)$ eine beliebige Funktion von x und y, und wo $y_\varkappa$ die Reihe $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{3!} . \delta^3 y + \ldots$ vorstellt. Man soll für diesen Fall die erste und zweite Variation δV und $\delta^2 V$ entwickelt darstellen.

---

*) Der ganze Zweck der Variationsrechnung besteht darinn, jedes beliebig mittelbar variirte $V_\varkappa$ nach ganzen steigenden Potenzen von $\varkappa$ zu entwickeln. In so ferne nun die Coefficienten dieser gesuchten Entwicklungsreihe durch δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. bezeichnet worden sind, diese Coefficienten selbst aber aus den in V enthaltenen Veränderlichen, und aus den durch beliebige unmittelbare Variation eingegangenen willkührlichen Variations-Coefficienten δy, $\delta^2 y$, etc. etc., etc. etc. etc. zusammengesetzt seyn werden, so richtet sich unser Zweck vorzüglich dahin, diese Zusammensetzungen von δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. wirklich entwickelt herzustellen, was eben jedesmal nach (§. 5.) durch bloßes Differentiiren bewerkstelligt wird.

Auflösung. Nach (§. 5.) differentiirend, erhält man augenblicklich nach (E. §. 45):

1) $\delta V = \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta y$; *) und

2) $\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cdot \delta y^2 + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta^2 y$. **)

§. 8. Aufgabe 2.

Es ist $V = f(x, y, z)$ und $V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, z_\varkappa)$ gegeben; wo $f(x, y, z)$ eine beliebige Funktion von x, y, z bedeutet und wo $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ die Reihen

$$y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{3!} . \delta^3 y + \ldots, \quad z + \varkappa . \delta z + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{3!} . \delta^3 z + \ldots$$

vorstellen. Man soll δV und $\delta^2 V$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Nach (§. 5.) in Verbindung mit (E. §. 45.) ergiebt sich:

1) $\delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} . \delta z$;

2) $\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial z} . \delta y . \delta z + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \delta z^2$
$\qquad + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z} . \delta^2 z.$

---

*) Nehmlich $\frac{\partial (V_\varkappa)}{\partial \varkappa} = \frac{\partial . (V_\varkappa)}{\partial . (y_\varkappa)} . \frac{\partial . (y_\varkappa)}{\partial \varkappa}$ und für $\varkappa = 0$, $\delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y$ (§. 4.), weil $\left(\frac{\partial . V_\varkappa}{\partial . y_\varkappa}\right)_0 = \frac{\partial V}{\partial y}$ wird, wenn Null ein Werth von $\varkappa$ ist.

**) Man muß sich nehmlich $\delta^2 V = \left(\frac{\partial^2 (V_\varkappa)}{\partial \varkappa^2}\right)_0$ denken, aber wenn man will, auch $\delta^2 V = \delta(\delta V)$, indem man sich unter dem (δV) nichts weiter als $\frac{\partial (V_\varkappa)}{\partial \varkappa}$ denkt, ohne sich $\varkappa = 0$ vorzustellen, so daß dann $\delta(\delta V)$ als $\delta \left(\frac{\partial (V_\varkappa)}{\partial \varkappa}\right)$ d. h. als $\frac{\partial . \left(\frac{\partial (V_\varkappa)}{\partial \varkappa}\right)}{\partial \varkappa}$ gedacht wird. Nur ganz zuletzt nach allen beendigten Operationen denkt man sich $\varkappa = 0$; (§. §. 4. 5.) und (E. §. 45.).

Anmerkung. Es fällt in die Augen, daß diese vorstehenden Resultate gelten:

1) wenn y und z von einander und von x, ganz unabhängig sind; nur sind dann auch δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc. von einander und von x, als ganz unabhängig anzusehen;

2) wenn y und z von einander unabhängig, aber beide Funktionen von x sind; nur sind dann auch δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc. etc. von einander als unabhängig, sämtlich aber als Funktionen von x anzusehen; ferner

3) wenn zwischen y und z noch eine Gleichung gegeben ist, $\varphi(y, z)=0$, welche auch zwischen $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ statt finden soll (so daß $\varphi(y_\varkappa, z_\varkappa)=0$ ist), es mögen übrigens y und z noch Funktionen von x seyn oder nicht; nur werden dann die δy und δz, eben so die $\delta^2 y$ und $\delta^2 z$, etc. zu einander in einer durch diese Gleichung selbst bedingten Abhängigkeit stehen, und dabei als Funktionen von x angesehen werden müssen oder nicht, je nachdem y und z als Funktionen von x gedacht sind oder nicht; — auch

4) wenn y eine Funktion von x, und z die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder ∂y (E. §. 44.) vorstellt, so daß auch $z_\varkappa$ die Ableitung $\frac{\partial (y_\varkappa)}{\partial x}$ oder $\partial \cdot (y_\varkappa)$ seyn soll; nur werden dann die δy, $\delta^2 y$, etc. als beliebige Funktionen von x gedacht werden müssen, während (nach §. 6.)

$$\delta z = \delta \cdot \partial y = \partial \cdot \delta y, \quad \delta^2 z = \partial \cdot \delta^2 y, \quad \delta^3 z = \partial \cdot \delta^3 y,$$

u. s. w. f. seyn werden; u. s. w. f.

§. 9. Aufgabe 3.

Es ist $V = f(x, y, y_1, y_2, y_3, \cdots y_m)$ gegeben, wo y als Funktion von x gedacht ist, und wo $y_1, y_2, y_3, \cdots y_m$ die Ableitungen $\partial y, \partial^2 y, \partial^3 y, \cdots \partial^m y$ nach x genommen, vorstellen sollen.

Man denkt sich y als beliebig variirt und in $y_\varkappa$ oder $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} \delta^2 y + \text{etc.}$ übergehend, und soll nun die Variations-Coefficienten δV und $\delta^2 V$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Dadurch daß y in $y_\varkappa$ übergeht, gehen

$$\partial y, \quad \partial^2 y, \quad \partial^3 y, \ldots \partial^m y$$

oder

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots y_m$$

in

$$\partial (y_\varkappa), \ \partial^2 (y_\varkappa), \ \partial^3 (y_\varkappa), \ldots \partial^m (y_\varkappa)$$

über, die man auch, da sie ebenfalls wieder, nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihen sind, die für $\varkappa=0$ auf

$y_1, y_2, y_3,$ etc. y_m sich zurückziehen, durch

$$(y_1)_\varkappa, (y_2)_\varkappa, (y_3)_\varkappa, \ldots (y_m)_\varkappa$$

vorstellen, und als die variirten $y_1, y_2,$ etc. ansehen kann. Dann ist also

$$V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, (y_1)_\varkappa, (y_2)_\varkappa, \ldots (y_m)_\varkappa)$$

und nach (§. 5. und E. §. 45.)

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\delta(y_1) + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\delta(y_2) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_m}.\delta(y_m); \text{*)}$$

und weil $\delta.(y_p) = \delta.(\partial^p y) = \partial^p.\delta y$ ist (§. 6.), für jede Zahl p, so hat man auch:

$$1)\ \delta V = \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta y + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_m}.\partial^m\delta y \text{ **)}$$

oder auch (E. §. 30.):

$$\delta V = S.\left[\frac{\partial V}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right]_{a+b=m},$$

wenn y_0 mit y selbst gleichbedeutend genommen wird.

Aus dieser Gleichung (1.), indem man $\varkappa$ noch nicht als Null denkt, erhält man dann durch nochmalige Differentiation nach $\varkappa$, wie im (E. §. 45.) und mit Zuziehung von (§. 6.):

$$2)\ \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_1}.\delta y.\partial\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}(\partial\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_2}.\delta y.\partial^2\delta y +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1.\partial y_2}.\partial\delta y.\partial^2\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}.(\partial^2\delta y)^2 + \text{ etc. etc. etc.} +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta^2 y + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_m}.\partial^m\delta^2 y.$$

---

*) Wo $\frac{\partial V}{\partial y_p}$ die Ableitung nach dem in V explicit enthaltenen Veränderlichen y_p, bedeutet (E. §. §. 35. 36 und 44.).

**) Dies ist der Ausdruck der (E. §. §. 65 und 85.), wenn $\frac{\partial V}{\partial y_a}$ statt L_a geschrieben wird.

§. 10. Aufgabe 4.

Es ist gegeben

$$V = f(x, y, y_1, y_2, y_3 \ldots y_m, z, z_1, z_2, \ldots z_n)$$

wo y und z als Funktionen von x gedacht werden, $y_1, y_2 \ldots y_m$, $z_1, z_2, \ldots z_n$ aber die Ableitungen derselben nach x genommen vorstellen sollen (wie im §. 9.). Die Ausdrücke y und z werden durch $\varkappa$ variirt, also in $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ (§. §. 3 und 4.) übergehend gedacht; man soll δV und $\delta^2 V$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Man hat hier analog dem (§. 10.):

$$V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, (y_1)_\varkappa \ldots (y_m)_\varkappa, z_\varkappa, (z_1)_\varkappa \ldots (z_n)_\varkappa),$$

dahero nach (§. 5. und E. §. 45.) und (§. 6.):

$$1)\ \delta V = \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta y + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_m}.\partial^m\delta y$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial z}.\delta z + \frac{\partial V}{\partial z_1}.\partial\delta z + \frac{\partial V}{\partial z_2}.\partial^2\delta z + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z_n}.\partial^n\delta z$$

oder

$$\delta V = S.\left[\frac{\partial V}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right]_{a+b=m} + S.\left[\frac{\partial V}{\partial z_a}.\partial^a\delta z\right]_{a+b=n}. \quad (\text{Vgl. (E. §. 67.)}.$$

Differentiirt man hier, indem man sich nach (§. 5.) noch nicht $\varkappa = 0$ gesetzt denkt, nochmals nach $\varkappa$, so ergiebt sich auch

2) $\delta^2 V$. *)

§. 11. Aufgabe 5.

Es ist ganz wie im (§. 9.), und unter Voraussetzung derselben Bezeichnung $V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_m)$ und $V_\varkappa$ das, was aus V wird, wenn y in $y_\varkappa$ übergeht; es

---

*) Wir werden in der Folge öfter die wirkliche Entwicklung von $\delta^2 V$ so wie hier geschehen nicht hinschreiben, um nicht zu viel Raum bloßen Formeln widmen zu müssen. Im Nothfalle kann man ja auch aus dem Anhange wo $\delta^n V$ entwickelt steht, das $\delta^2 V$ für $n=2$ entnehmen.

ist aber ferner noch $U = \int V \partial x$ und $U_{,,} = \int V_{,,} . \partial x$ *) gedacht. Man soll δU und $\delta^2 U$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Man hat nach (§. 6.):

$$1)\quad \delta U = \delta . \int V \partial x = \int (\delta V) . \partial x$$

und

$$2)\quad \delta^2 U = \delta^2 . \int V \partial x = \int (\delta^2 V) . \partial x$$

und dabei statt δV und $\delta^2 V$ die (§. 9. n. 1. und n. 2.) bereits gefundenen Entwicklungen zu setzen. — Nur müssen die Integrale alle zwischen denselben Grenzen entweder $x = a$ und $x = x$ (d. h. noch unbestimmt), oder $x = a$ und $x = b$ genommen seyn.

§. 12. Zusatz 1.

Setzt man aber in (§. 11. n. 1.) statt δV die (§. 9. n. 1.) bereits gefundene Entwicklung, so kann man dann, (wie E. §. 66. geschehen) auch noch theilweise integriren, und so δU in einer für die Anwendung brauchbarern Form darstellen. Man erhält nehmlich dann (aus E. §. 65., s. Note zu §. 9., $\frac{\partial . V}{\partial . y_\alpha}$ statt L_α setzend):

$$\delta . (U_{x \div a}) = \underset{\mathfrak{b}+c+\mathfrak{d}=m-1}{S} . \left[(-1)^c . \partial^c \left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+\mathfrak{d}+1}} \right) . \partial^{\mathfrak{d}} \delta y \right]_{x \div a}$$

$$+ \int_{x \div a} \left(S . \left[(-1)^\alpha . \partial^\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial y_\alpha} \right) \right] \delta y \right) . \partial x,$$

wenn das obige Integral mit $x = a$ anfangen soll. — Und soll das Integral zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommen werden, so hat man nur in den Zeigern unten, nehmlich $(x \div a)$, b statt x zu setzen.

---

*) Da V und U ausser der hier oben angenommenen Art, noch sehr verschiedentlich mittelbar variirt gedacht werden können (in so ferne man x selbst in $x_{,,}$ übergehend, ja V und U selbst noch unmittelbar variirt denken könnte) so ist es nicht überflüssig, sondern sogar nothwendig, daß man in jedem postulirten Falle angebe, auf welche Weise die Variation gedacht ist, oder daß man in jedem Falle der Anwendung untersuche und heraushebe, wie die variirten Funktionen zu nehmen sind.

§. 13. Zusatz 2.

Wären aber V und $V_{\prime\prime}$ die Funktionen des (§. 10.), $U = \int V \partial x$, $U_{\prime\prime} = \int V_{\prime\prime} . \partial x$, so würden, um nun $\delta(U_{x+a})$ zu finden, offenbar zu den eben für $\delta(U_{x+a})$ gefundenen Gliedern in δy, noch ganz analoge in δz hinzugeschrieben werden müssen. Dasselbe gilt in Bezug auf $\delta^2 U$, und es ist leicht, dies beliebig weit zu verfolgen.

§. 14. Aufgabe 6.

Es ist $V_1 = f_1(V, x, y, y_1, y_2 \ldots y_n)$ und V selbst die Funktion des (§. 9.), nehmlich

$V = f(x, y, y_1, \ldots y_m)$ gegeben, unter der Voraussetzung der dortigen Bezeichnung, so daß $y_1, y_2 \ldots y_p$ etc. statt der Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots \frac{\partial^p y}{\partial x^p}$ etc. stehen; aber V_1 soll nicht (nothwendig) die Ableitung von V nach x bedeuten, sondern f_1 soll eine ganz beliebige Zusammensetzung andeuten. Man denkt sich y beliebig variirt und in $y_{\prime\prime}$, und dadurch allein V in $V_{\prime\prime}$ übergehend; man soll auch hier δV_1 und $\delta^2 V_1$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Nach (§. 5.) hat man (E. §. 45.):

$$\delta V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial V} . \delta V + \frac{\partial V_1}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} . \partial \delta y + \frac{\partial V_1}{\partial y_2} . \partial^2 \delta y + \ldots \\ + \frac{\partial V_1}{\partial y_n} . \partial^n \delta y,$$

wo nur noch statt δV der (§. 9.) dafür gefundene entwickelte Ausdruck geschrieben werden darf.

Es ist aber noch einfacher, sich statt V in f_1 die durch V bezeichnete Funktion f selbst gesetzt zu denken, weil dann V_1 als bloße (theils mittelbare theils unmittelbare) Funktion von x, y und den Ableitungen y_1, y_2, y_3 etc. etc. erscheint und genau in den Fall des (§. 9.) übergeht, so daß man hat:

$$1) \begin{cases} \delta V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V_1}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial V_1}{\partial y_2}.\partial^2\delta y + \frac{\partial V_1}{\partial y_3}.\partial^3\delta y + \dots \\ \text{oder} \\ \delta V_1 = S.\left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right], \end{cases}$$

wo man bemerken mag, daß für jeden Werth p von a

$$\frac{\partial V_1}{\partial y_p} = \frac{\partial V_1}{\partial y_p} + \frac{\partial V_1}{\partial V}.\frac{\partial V}{\partial y_p}$$ seyn muß (E. §. 45.).

Aber eben so erhält man

2) $\delta^2 V_1$, wenn man in dem Resultat des (§. 9.) V_1 statt V schreibt und dabei bemerkt, daß V_1 die y, y_1, y_2, etc. explicit und zugleich auch implicit in V, enthält; daher die Bezeichnung (E. §. 44.) gebraucht.

§. 15. Zusatz 1.

Sind aber U_1 und $(U_1)_n$ so gedacht, daß sie die Integrale sind von V_1 und $(V_1)_n$, also

$$U_1 = \int V_1 \partial x \quad \text{und} \quad (U_1)_n = \int (V_1)_n . \partial x,$$

so erhält man wiederum

$$1)\ \delta U_1 = \int \delta V_1 . \partial x \quad \text{und} \quad 2)\ \delta^2 U_1 = \int \delta^2 V_1 . \partial x$$

in so ferne die Integrale alle zwischen denselben Grenzen $x = a$ und $x = x$ oder $x = a$ und $x = b$ genommen sind; und dies giebt, wie leicht zu sehen, dieselben Umformungen, wie wir sie schon (§. 11. und §. 12.) gesehen haben, nur V_1 statt des dortigen V geschrieben, und dabei nicht außer Acht gelassen, daß V_1 als eine theils unmittelbare theils mittelbare Funktion von y, y_1, y_2, etc. etc. etc. gegeben ist.

§. 16. Zusatz 2.

Kämen in V_1 außer der Funktion V, auch noch andere ähnliche Funktionen V', V'', V''' etc. etc. vor, so würde nach der letztern Ansicht, weder (§. 14.) noch (§. 15.) eine Abänderung erleiden; wenn man nur bemerkte, daß V_1 das

y_p (wo p irgend eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3, etc. vorstellt) explicit, und auch implicit in V und in V', V'', V''', etc. etc. enthält, so daß also

$$\frac{\partial V_1}{\partial y_p} = \frac{\partial V_1}{\partial y_p} + \frac{\partial V_1}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_p} + \frac{\partial V_1}{\partial V'} \cdot \frac{\partial V'}{\partial y_p} + \frac{\partial V_1}{\partial V''} \cdot \frac{\partial V''}{\partial y_p} + \cdots$$

gesetzt werden muß.

§. 17. Zusatz 3.

Denkt man sich explicit, oder implicit (in V, V', V'' etc. etc.), oder explicit und implicit zugleich auch noch, wie im (§. 10.), z als Funktion von x und dann die durch $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$ bezeichneten Ableitungen nach x genommen, in V_1 vorkommend, so würden für $\delta V_1, \delta U_1, \delta^2 V_1, \delta^2 U_1$ noch immer genau dieselben Ausdrücke in δy sich ergeben, nur würden noch ganz analoge Glieder in δz hinzutreten.

§. 18. Aufgabe 7.

Sey wiederum, wie im (§. 9.) und im (§. 11.)

$$V = f(x, y, y_1, y_2 \ldots y_m) \text{ und } U = \int V \partial x.$$

Es wird nun, unter dieser Voraussetzung, $V_1 = f_1(U, x, y, y_1, y_2, \ldots y_n)$ gegeben, wo das Integral U ganz allgemein gedacht, oder wo statt U das besondere Integral U_{x+a} oder gar das bestimmte Integral U_{b+a} stehen kann; und dadurch allein, daß y beliebig durch $\varkappa$ variirt wird, also in $y_\varkappa$ übergeht, V, U und V_1 in $V_\varkappa, U_\varkappa, (V_1)_\varkappa$ übergehend gedacht, während y_1, y_2, y_3 etc. etc. die Ableitungen von y nach x bedeuten (wo aber V_1 nicht gerade die Ableitung von V, sondern eine beliebige Funktion der angegebenen Veränderlichen vorstellt); man soll δV_1 und $\delta^2 V_1$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Nach (§. 5.) hat man sogleich:

$$(\sigma)\ \delta V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial U}.\delta U + \frac{\partial V_1}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V_1}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial V_1}{\partial y_2}.\partial^2\delta y + \ldots + \frac{\partial V_1}{\partial y_n}.\partial^n\delta y \qquad = \frac{\partial V_1}{\partial U}.\delta U + S.\left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right]_{a+b=n}$$

wo für δU nur noch der (§. 12.) gefundene Werth zu setzen ist. — Man erhält nach geschehener Substitution, wenn U statt U_{x+a} steht, d. h. wenn das Integral U mit $x=a$ anfangen soll:

$$1)\ \delta V_1 = S.\left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right]_{a+b=n}$$

$$+\left(S.\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta y\right]_{b+c+d=m-1}\right)_{x+a} \times \frac{\partial V_1}{\partial U}$$

$$+\frac{\partial V_1}{\partial U}.\int_{x+a}\left(S.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right].\delta y\right)\partial x;$$

wo man nur in den Zeigern $(x \div a)$, b statt x schreiben darf, wenn das Integral U zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommen seyn sollte.

Differentiirt man aber nach (§. 5.) dieses nochmal nach x, so erhält man leicht, wenn auch etwas weitläufig,

2) $\delta^2 V_1$; was man auch noch erhalten könnte, wenn gleich die Formel (σ) nochmals nach x differentiirt und dann sowohl für δU, als auch für $\delta^2 U$, die (§. 11.) schon berührten Entwickelungen gesetzt würden.

§. 19. Zusatz 1.

Wäre alles wie im vorhergehenden (§. 18.), aber noch

$$U_1 = \int V_1.\partial x \quad \text{und} \quad (U_1)_x = \int (V_1)_x.\partial x,$$

so würde man nach (§. 6.) haben:

$$1)\ \delta U_1 = \int(\delta V_1).\partial x \quad \text{und} \quad 2)\ \delta^2 U_1 = \int(\delta^2 V_1).\partial x;$$

oder, die Formel (σ) zu Hilfe nehmend, und wenn man bemerkt, daß

$$\delta U = \int(\delta V).\partial x$$ ist, auch

3) $\delta U_1 = \int \frac{\partial V_1}{\partial U} \int (\delta V) \cdot \partial x^2 + \int S . \left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a} . \partial^a \delta y \right] . \partial x$
$a+b=n$

wo $\int(\delta V) . \partial x$ zwischen denselben Grenzen als U, die übrigen Integrale aber zwischen denselben Grenzen zu nehmen sind, zwischen denen U_1 genommen ist.

Wendet man nun hier auf den ersten Theil rechts die Umformung der (E. §. §. 68 — 70.) an, $\frac{\partial V_1}{\partial U}$ statt L′ und δV statt L setzend; bringt man ferner auf den zweiten Theil in (n. 3.) rechts, die Umformung des (E. §. 65.) in Anwendung, so erhält man augenblicklich δU_1 so umgeformt, daß bloß noch δy, aber keine Ableitung von δy unter dem Integralzeichen mehr vorkommt, während zu gleicher Zeit der vom Integralzeichen befreite Theil, nach δy, $\partial \delta y$, $\partial^2 \delta y$, etc. die lineäre Form hat, gerade so, wie solches in den später folgenden Anwendungen gewünscht wird.

Dabei ist es einerlei, ob die Integrale U und U_1 beide allgemeine seyn und mit verschiedenen Grenzwerthen von x, nehmlich a und a_1 anfangen sollen, oder ob $a = a_1$ ist, oder ob das Integral U oder U_1 oder beide, zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommen werden sollen, wenn man nur die Umformung nach (E. §. 68.) oder (E. §. 69.) oder (E. §. 70.), überhaupt jedesmal den gegebenen Bedingungen angemessen, bewerkstelligt.

§. 20. Zusatz 2.

Kämen in V noch analoge Glieder in z, z_1, z_2, etc. (d. h. z, ∂z, $\partial^2 z$, $\partial^3 z$, ...) vor (z als Funktion von x gedacht, und die Ableitungen alle nach x genommen); so würden auch zu den in (§. 18.) oder (§. 19.) gefundenen Ausdrücken für δV_1 oder δU_1 noch analoge Glieder in δz hinzutreten, wie sie daselbst in δy entwickelt stehen, die ohne weiteres hingeschrieben werden können. Dasselbe gilt, wenn auch noch u, v, etc. und ihre Ableitungen vorkommen sollten.

§. 21. Zusatz 3.

Denkt man sich in V_1 noch mehre solche Integrale, wie $U=\int V\partial x$, nehmlich $U'=\int V'\partial x$, $U''=\int V''\partial x$ etc. enthalten, so wird

$$\delta V_1=\frac{\partial V_1}{\partial U}.\delta U+\frac{\partial V_1}{\partial U'}.\delta U'+\frac{\partial V_1}{\partial U''}.\delta U''+\text{etc.}+S.\left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right]$$

und

$$\delta U_1=\int\frac{\partial V_1}{\partial U}\int\delta V.\partial x^2+\int\frac{\partial V_1}{\partial U'}\int\delta V'.\partial x^2+\int\frac{\partial V_1}{\partial U''}\int\delta V''.\partial x^2+\ldots+$$
$$+\int S.\left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right].\partial x,$$

so daß also eben solche Glieder aus U', U'', etc. hervorgehend noch hinzutreten, wie man sie aus U in den vorhergehenden (§. §.) schon erhalten hat.

§. 22. Aufgabe 8.

Es ist V und U, V_1 und U_1 genau so, wie in den (§. §. 18 und 19) nehmlich,

$$V=f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_m) \quad \text{und} \quad U=\int V.\partial x,$$
$$V_1=f_1(U, x, y, y_1, y_2 \ldots y_n) \quad \text{und} \quad U_1=\int V_1.\partial x.$$

Ferner ist noch gegeben:

$$V_2=f_2(U_1, x, y, y_1, \ldots y_p) \quad \text{und} \quad U_2=\int V_2.\partial x;$$

und nun y in $y_{{}_{\prime\prime}}$ und dadurch allein V, U, V_1, U_1, V_2, U_2 in $V_{\prime\prime}, U_{\prime\prime}, (V_1)_{\prime\prime}, (U_1)_{\prime\prime}, (V_2)_{\prime\prime}, (U_2)_{\prime\prime}$ übergehend gedacht; man soll δV_2, δU_2, $\delta^2 V_2$ und $\delta^2 U_2$ entwickelt herstellen.

Auflösung. Nach (§. 5.) hat man:

$$1)\ \delta V_2=\frac{\partial V_2}{\partial U_1}.\delta U_1+\frac{\partial V_2}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial V_2}{\partial y_1}.\partial\delta y+\frac{\partial V_2}{\partial y_2}.\partial^2\delta y+\ldots$$
$$+\frac{\partial V_2}{\partial y_p}.\partial^p\delta y$$

oder

$$=\frac{\partial V_2}{\partial U_1}.\delta U_1+S.\left[\frac{\partial V_2}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right]_{a+b=p}$$

und 2) $\delta U_2 = \int \delta V_2 . \partial x$.

In (nro. 1.) hat man nur statt δU_1 den oben dafür gefundenen entwickelten Ausdruck zu setzen, in (nro. 2.) dagegen den für δV_2 in (nro. 1.) erhaltenen, um sowohl δV_2 als auch δU_2 entwickelt in δy und dessen Ableitungen ausgedrückt zu haben, aus denen dann durch neue Differentiation nach x, dem (§. 5.) gemäß, auch $\delta^2 V_2$ und $\delta^2 U_2$ gefunden werden können.

Soll aber δU_2 wiederum dieselbe Form erhalten, welche wir (§. 19.) dem δU_1 gegeben haben, so nehmlich, daß bloß δy allein (und keine Ableitung desselben) unter dem Integralzeichen vorkommt, so muß man in (n. 2.) statt δV_2 den unveränderten Ausdruck (nro. 1.) setzen, so daß man erhält, weil $\delta U_1 = \int (\delta V_1) . \partial x$ ist,

$$3)\ \delta U_2 = \int \frac{\partial V_2}{\partial U_1} \int (\delta V_1) . \partial x^2 + \int S . \left[\frac{\partial V_2}{\partial y_a} . \partial^a \delta y \right] . \partial x$$

oder, wenn man statt δV_1 den Ausdruck (§. 18. ♂) substituirt und bemerkt, daß $\delta U = \int \delta V . \partial x$ und

$$\delta V = S . \left[\frac{\partial V}{\partial y_a} . \partial^a \delta y \right] \text{ ist,}$$

$$4)\ \delta U_2 = \int \frac{\partial V_2}{\partial U_1} \int \frac{\partial V_1}{\partial U} \int \delta V . \partial x^3 + \int \frac{\partial V_2}{\partial U_1} \int S . \left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a} . \partial^a \delta y \right] . \partial x^2$$
$$+ \int S . \left[\frac{\partial V_2}{\partial y_a} . \partial^a \delta y \right] . \partial x;$$

wo in jedem der 3 Theile rechts, wenn man von der linken zur rechten fortgeht, die ersten Integrale mit U_2, die dann folgenden Integrale mit U_1 und das in dem ersten Theil dann folgende $\int \delta V . \partial x$ mit U selbst, zwischen einerlei Grenzen genommen sind.

Dieses δU_2 besteht also nun aus 3 Theilen. Den ersten derselben, der 3 auf einander folgende Integrationen enthält, sieht man nach (E. §. 72.) auf die gewünschte Form gebracht,

wenn man $\frac{\text{statt}\quad L'',\quad L',\quad L,\quad L_a}{\text{beziehlich}\ \frac{\partial V_2}{\partial U_1},\ \frac{\partial V_1}{\partial U},\ \delta V,\ \frac{\partial V}{\partial y_a}}$

substituirt. Eben so sieht man den zweiten Theil rechts in δU_2 auf dieselbe Form gebracht, wenn man in (E. §. 68.) $\frac{\partial V_2}{\partial U_1}$ statt L', und $\frac{\partial V_1}{\partial y_a}$ statt L_a substituirt. Zuletzt ergiebt sich auch der dritte Theil von δU_2 in der gewünschten Form, wenn in (E. §. 65.) $\frac{\partial V_2}{\partial y_a}$ statt L_a geschrieben wird, für jeden Werth, den a haben kann. Und so hat also dann δU_2 selbst diese gewünschte Form.

Anmerkung. Indem wir die (E. §. §. 65, 68 und 72.) anwenden wollen, setzen wir voraus, daß die Integrale U, U_1 und U_2 alle unbestimmt sind und jedes mit einem willkührlichen Grenzwerth anfängt. Sollten aber die Integrale alle mit $x = a$ anfangen, sollte das letzte auch mit $x = b$ aufhören, oder sollten alle bestimmt und zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommen werden, so müßte man statt der (E. §. §. 68. 72.) die folgenden (E. §. §. 69. 70. 73. 74.) in Anwendung bringen.

§. 23. Zusatz.

Man könnte sich nun, unter Voraussetzung aller Bedingungen des (§. 22.) noch weiter

$$V_3 = f_3(U_2, x, y, y_1, \cdots y_q) \quad \text{und} \quad U_3 = \int V_3 \cdot \partial x$$

denken, und V_3 in $(V_3)_\omega$, U_3 in $(U_3)_\omega$ bloß dadurch übergehend, daß y in y_ω übergeht, und man erhielte dann

$$\delta U_3 = \int \frac{\partial V_3}{\partial U_2} \int \frac{\partial V_2}{\partial U_1} \int \frac{\partial V_1}{\partial U} \int \delta V \cdot \partial x^4 + \int \frac{\partial V_3}{\partial U_2} \int \frac{\partial V_2}{\partial U_1} \int S.\left[\frac{\partial V_1}{\partial y_a} \cdot \partial^a \delta y\right] \cdot \partial x^3$$

$$+ \int \frac{\partial V_3}{\partial U_2} \int S.\left[\frac{\partial V_2}{\partial y_a} \cdot \partial^a \delta y\right] \cdot \partial x^2 + \int S.\left[\frac{\partial V_3}{\partial y_a} \cdot \partial^a \delta y\right] \cdot \partial x,$$

wo wiederum jeder einzelne der 4 Theile rechts nach den angeführten (§. §.) der Einleitung auf die verlangte Form gebracht werden kann, wie auch, was hier nicht mehr näher bezeichnet worden ist, die Grenzwerthe seyn mögen, zwischen de-

nen die einzelnen Integrale U, U_1, U_2, U_3 genommen seyn sollen.

Es ist aber leicht, wenn das bisher vorgetragene vollkommen aufgefaßt worden ist, sich noch zusammengesetztere Fälle zu bilden, und die Variationen nicht bloß zu finden, sondern auch zugleich auf die bisher beobachtete Form zu bringen, so daß die Variationen δy, δz etc. etc. allein und nicht mehr ihre Ableitungen unter dem Integralzeichen vorkommen, die vom Integralzeichen befreite Theile dagegen nach δy, $\partial \delta y$, $\partial^2 \delta y$, etc., δz, $\partial \delta z$, $\partial^2 \delta z$, etc. etc. von der linearen Form sind. — Dieserhalb wollen wir ein noch näheres Detail vermeiden.

§. 24. Aufgabe 9.

Es ist gegeben

$$V = f(x, x_1, y, y_1^0, y_0^1, y_2^0, y_1^1, y_0^2, \text{ etc. etc. etc.})$$

wo y eine Funktion der beiden absolut Veränderlichen x und x_1, und wo y_q^p die Ableitung $\frac{\partial^{q+p} y}{\partial x^q . \partial x_1{}^p}$ vorstellen soll, für jeden Werth von p und q. Man denke sich y durch $\varkappa$ variirt, also in $y_\varkappa$ übergehend, und dadurch allein auch V in $V_\varkappa$; und stelle δV und $\delta^2 V$ entwickelt dar.

Auflösung. So wie y in $y_\varkappa$ übergeht, geht y_q^p in $(y_\varkappa)_q^p$ d. h. in $\frac{\partial^{q+p}(y_\varkappa)}{\partial x^q . \partial x_1{}^p}$ über, folglich abermals in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihe, welche, eben weil sie für $\varkappa = 0$ in y_q^p selbst sich wieder zurückzieht, als das durch $\varkappa$ variirte y_q^p anzusehen und durch $(y_q^p)_\varkappa$ zu bezeichnen ist. Dann erhält man also aus (§. 5.), wenn man nach $\varkappa$ differentiirt, und bedenkt, daß $\delta . y_q^p = \delta . \frac{\partial^{q+p} y}{\partial x^q . \partial x_1{}^p}$ $= \frac{\partial^{q+p} . \delta y}{\partial x^q . \partial x_1{}^p}$ (nach §. 6.) ist:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1^0}.\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y_2^0}.\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \text{etc. etc.}$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y_0^1}.\frac{\partial \delta y}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1^1}.\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x.\partial x_1} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y_0^2}.\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x_1^2} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

oder

$$\delta V = S.\left[\frac{\partial V}{\partial y_a^b}.\frac{\partial^{a+b}\delta y}{\partial x^a.\partial x_1^b}\right].$$

§. 25. Zusatz.

Ist alles, wie in dem vorhergehenden Paragraphen, aber auch noch

$$U = \int_{b\div a}(\int_{x''\div x'} V.\partial x_1).\partial x$$

und
$$U_* = \int_{b\div a}(\int_{x''\div x'} V_*.\partial x_1).\partial x,$$

so ist nach (§. 6.):

$$\delta U = \int_{b\div a}(\int_{x''\div x'} \delta V.\partial x_1).\partial x,$$

oder wenn man statt δV den (§. 24.) gefundenen entwickelten Ausdruck setzt:

$$\delta U = \int_{b\div a}(\int_{x''\div x'} S.\left[\frac{\partial V}{\partial y_a^b}.\frac{\partial^{a+b}\delta y}{\partial x^a.\partial x_1^b}\right]\partial x_1).\partial x.$$

Und will man in diesem Resultat für δU, die Ableitungen von δy alle vom doppelten Integral befreien, so wendet man hier nur die Umformung (E. §. 80. I. oder II.) an, je nachdem die Grenzwerthe von x_1, nehmlich x'' und x' von dem andern absolut Veränderlichen x unabhängig sind, oder noch als Funktionen dieses x angesehen werden sollen.

§. 26. Aufgabe 10.

Es ist V irgend eine Funktion, welche den einzigen absolut Veränderlichen x enthält, und ausserdem noch y, z, etc. etc. als Funktionen von x (mit oder ohne deren Ableitungen, nach x genommen). — Man denke sich nun V dadurch in V_* übergehend, daß y, z, etc. beliebig unmittelbar durch

$\varkappa$ variirt werden, und bezeichne die sich hierauf beziehenden Variations-Coefficienten, nicht wie bisher durch δV, $\delta^2 V$, etc. sondern durch $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, etc. etc., so wie die von y, z, etc. durch $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1^2 y$, $\delta_1^2 z$, etc. etc., so daß

$$y_\varkappa = y + \varkappa . \delta_1 y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta_1^2 y + \ldots$$

$$z_\varkappa = z + \varkappa . \delta_1 z + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta_1^2 z + \ldots$$

$$V_\varkappa = V + \varkappa . \delta_1 V + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta_1^2 V + \ldots \quad \text{ist,}$$

während $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1^2 y$, $\delta_1^2 z$, etc. etc. mit y und z zugleich als Funktionen von x angesehen werden müssen. In diesem $V_\varkappa$ nun, welches eine Funktion von x, y, z, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, etc. etc. und $\varkappa$ und den Ableitungen nach x, aller dieser letztern Ausdrücke seyn wird, werde noch alles x durch $\varkappa$ beliebig variirt, d. h. x in $x_\varkappa$ oder in $x + \varkappa . \delta x + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 x + \ldots$ übergehend gedacht, (sowohl das x, was in $V_\varkappa$ ausserhalb, als auch jedes x, was in y, z, ∂y, ∂z, etc. δy, δz, $\partial \delta y$, $\partial \delta z$, etc. etc. vorkommt) und das was dadurch aus $V_\varkappa$ hervorgeht, durch $V_{(\varkappa)}$ bezeichnet, so wie die Variations-Coefficienten durch δV, $\delta^2 V$, etc. so daß

$$V_{(\varkappa)} = V + \varkappa . \delta V + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 V + \text{etc. etc.} \quad \text{ist;}$$

man soll δV, $\delta^2 V$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Es ist nach (§. §. 4. und 5.) $\delta V = \left(\frac{\partial . V_{(\varkappa)}}{\partial \varkappa} \right)_0$, wo 0 ein Werth von $\varkappa$ (E. §. 34.). Nun kann man aber, um $\frac{\partial . V_{(\varkappa)}}{\partial \varkappa}$ zu erhalten, erstlich nach dem $\varkappa$ differentiiren, welches bei der ersten Variation des y, z, etc. eingieng, und dann noch nach dem $\varkappa$, welches dadurch eingeht, daß überall $x_\varkappa$ statt x gesetzt gedacht wird.

Bezeichnet man den ersten Theil des Differentials durch $\frac{\partial . V_{(\varkappa)}}{\partial \varkappa}$, so wird man, den Lehren der Differential-Rechnung gemäß, haben:

$$1) \qquad \frac{\underline{\partial . V_{(\varkappa)}}}{\partial \varkappa} = \frac{\partial . V_{(\varkappa)}}{\partial \varkappa} + \frac{\partial V_{(\varkappa)}}{\overline{\partial (x_{\varkappa})}} . \frac{\partial (x_{\varkappa})}{\partial \varkappa};$$

folglich für $\varkappa = 0$

$$(\odot) \qquad 2) \qquad \delta V = \delta_1 V + \partial V . \delta x,$$

wo ∂V die Ableitung von V nach allem x bedeutet, und wo man nur noch für $\delta_1 V$, den nach den vorhergehenden (§. §.) jedesmal leicht anzugebenden entwickelten Ausdruck setzen darf. *)

Nimmt man die praktische Regel des (§. 5.) zu Hülfe, so wird man sich in dem δV, $\delta_1 V$ und ∂V der (n. 2.) noch die Ausdrücke der (n. 1.) vorgestellt denken (wo noch nicht $\varkappa = 0$ gesetzt ist), und nun diesen Ausdruck noch einmal nach allem $\varkappa$ differentiiren, auf dieselbe Weise; dann wird man erhalten:

$$3) \qquad \delta^2 V = \delta(\delta_1 V) + \delta(\partial V . \delta x).$$

Nun ist aber nach derselben (nro. 2.), $\delta_1 V$ statt V setzend,

$$4) \qquad \delta(\delta_1 V) = \delta_1^2 V + \partial(\delta_1 V) . \delta x$$

und dabei auch, nach (§. 5.):

$$5) \qquad \delta(\partial V . \delta x) = \delta(\partial V) . \delta x + \partial V . \delta^2 x;$$

während wiederum nach (n. 2.)

$$6) \qquad \delta(\partial V) = \delta_1(\partial V) + \partial(\partial V) . \delta x, \quad \text{oder nach (§. 6.)}$$
$$= \partial(\delta_1 V) + \partial^2 V . \delta x \qquad \text{seyn wird;}$$

folglich, wenn man diesen Werth (n. 6.) in (n. 5.) und diesen letztern (n. 5.) nebst (n. 4.) in (n. 3.) substituirt

---

*) In allen den früher gegebenen Beispielen nehmlich, sind die daselbst vorkommenden Zeichen δV, δy, δz, etc. die hiesigen $\delta_1 V$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, etc. etc.; so daß also, wenn man die dortigen Resultate hieher verpflanzen will, statt der dortigen δ immer die hiesigen δ_1 gesetzt werden müssen.

(☾.) 7) $\delta^2 V = \delta_1^2 V + 2.\partial(\delta_1 V).\delta x + \partial^2 V.\delta x^2 + \partial V.\delta^2 x$,
welche Formel jedoch einfacher wird, wenn $\delta^2 x = 0$ seyn sollte.

Anmerkung. Dasselbe gilt natürlich für jede beliebige Funktion V der angegebenen Art, also auch, wenn bloß $V = y$ seyn sollte. — Es ist daher auch:

$$1)\quad \delta y = \delta_1 y + \partial y.\delta x$$

$$2)\quad \delta^2 y = \delta_1^2 y + 2.\partial(\delta_1 y).\delta x + \partial^2 y.\delta x^2 + \partial y.\delta^2 x,$$

wo $\delta_1 y$, $\delta_1^2 y$, etc. etc. die Coefficienten von y_n, dagegen δy, $\delta^2 y$, etc. die von $y_{(n)}$ sind, während $y_{(n)}$ aus y_n hervorgeht, wenn in letzterem x_n statt x gesetzt wird (sowohl in y selbst als auch in $\delta_1 y$, $\delta_1^2 y$, etc., die als Funktionen von x angesehen werden). — Uebrigens bedeuten die bloßen ∂ allemal die Ableitungen nach allem x.

Aus den Gleichungen (n. 1. und n. 2.) kann man übrigens auch umgekehrt $\delta_1 y$ und $\delta_1^2 y$ in δy und $\delta^2 y$ ausdrücken; so wie aus den obigen Gleichungen (⊙) und (☾.) auch $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ in δV und $\delta^2 V$ auszudrücken sind.

§. 27. Zusatz 1.

Unter Voraussetzung aller Bedingungen des (§. 26.) und einer analogen Bezeichnung, sey nun noch

$$U = \int V.\partial x \qquad \text{und} \qquad U_n = \int V_n.\partial x$$

so wie auch

$$U_{(n)} = \int V_{(n)}.\partial x,$$

wo die Integrale alle mit demselben Grenzwerthe von x anfangen, oder zwischen denselben Grenzwerthen von x genommen seyn sollen, so folgt nach (§. 6.), wenn auch hier wieder die Variations-Coefficienten von U_n und $U_{(n)}$ beziehlich durch δ_1 und δ angedeutet werden:

$$1)\quad \delta_1 U = \int(\delta_1 V).\partial x \qquad \text{und} \qquad 2)\quad \delta U = \int(\delta V).\partial x.$$

Setzt man nun in (n. 2.) den aus (§. 26. ⊙) zu entnehmenden Werth von δV, so erhält man weiter

$$\delta U = \int(\delta_1 V + \partial V.\delta x).\partial x$$

oder

$$3)\quad \delta U = \int(\delta_1 V).\partial x + \delta x.(V + C)$$

wo C eine willkührliche aus dem Anfangsgrenzwerth der Integrale zu bestimmende Constante vorstellt, weil δx nach x

constant, also $\int(\partial V . \delta x)\partial x = \delta x . \int(\partial V) . \partial x = \delta x . (V + C)$ seyn wird. — Daraus folgt dann, nach (n. 1.)

4) $\delta(U_{x+a}) = \delta_1(U_{x+a}) + (V - V_a) . \delta x$

wo a ein Werth von x ist; und

5) $\delta(U_{b+a}) = \delta_1(U_{b+a}) + (V_b - V_a) . \delta x$ *).

Was endlich den 2ten Variations-Coefficienten betrifft; so hat man noch:

6) $\delta_1^2 U = \int(\delta_1^2 V) . \partial x$ und 7) $\delta^2 U = \int(\delta^2 V) . \partial x$,

die Integrale immer zwischen denselben Grenzen $x = a$ und $x = x$, oder $x = a$ und $x = b$ genommen, je nachdem das eine oder das andere für das gegebene U zur Bedingung gemacht wurde. — Setzt man daher in (7.) den Werth von $\delta^2 V$ aus (§. 26. C.), so findet sich

8) $\delta^2 U = \int(\delta_1^2 V) . \partial x + 2(\delta_1 V + C) . \delta x + (\partial V + C_1) . \delta x^2 + (V + C_2) . \delta^2 x$,

wo U und $\int(\delta_1^2 V) . \partial x$ und $\delta_1 V + C$ und $\partial V + C_1$ und $V + C_2$ für $x = a$ zu gleicher Zeit Null werden sollen. Daraus geht daher noch hervor

9) $\delta^2(U_{x+a}) = \delta_1^2(U_{x+a}) + 2 . (\delta_1 V)_{x+a} . \delta x$
$+ (\partial V)_{x+a} . \delta x^2 + V_{x+a} . \delta^2 x$,

so wie

10) $\delta^2(U_{b+a}) = \delta_1^2(U_{b+a}) + 2 . (\delta_1 V)_{b+a} . \delta x$
$+ (\partial V)_{b+a} . \delta x^2 + V_{b+a} . \delta^2 x$.

§. 28. Zusatz 2.

Ganz verschieden von der Aufgabe des vorhergehenden (§. 27.) ist dagegen diese andere, wo V und V_n, U und U_n genau eben so wie (§. §. 26. 27.) gegeben sind, wo aber in U_n als Funktion von x (also nach beendigt gedachter Inte-

*) Aber nicht $\delta U = \delta_1 U + V_b . \delta b - V_a . \delta a$, und zwar deshalb nicht, weil δx nach x constant ist, und seinen Werth mit x zugleich nicht ändert. Und wäre δx so, daß es für $x = b$ in δb und für $x = a$ in δa übergienge, d. h. wäre δx eine Funktion von x, so wäre die Integration, durch welche obige (n. 3.) erhalten wurde, unrichtig. Vergl. „Analyt. Darstell. d. Variations-Rechnung." Berlin 1823. p. p. (39 — 43.).

$x = a$ anfängt, x' und a aber nach x und x_1 constant sind.

Folglich aus (§. 30. n. 1.), T statt des dortigen V setzend

1) $\delta T = \delta_1 T + \delta x . \int_{x_1 \div x'} V . \partial x_1 + \delta x_1 . \int_{x \div a} V . \partial x.$

Und eben so ergiebt sich dann:

2) $\delta^2 T$ ohne weiters. (Vergl. §. 28.).

§. 33. Zusatz 3.

An diese letztere Aufgabe schließt sich aber zunächst folgende an: Es ist V, $V_{,,}$, T, $T_{,,}$ wie in dem vorhergehenden (§. 32.), und die Coefficienten von $V_{,,}$ $T_{,,}$ seyen durch δ_1 angedeutet. Dagegen sey unter $T_{(,,)}$ das verstanden, was aus $(T_{,,})_{x'' \div x', \, b \div a}$ (E. §. 58.) als Funktion von x'', x', b und a (die nicht mehr x_1 und nicht mehr x enthält) wird, so oft x'', x', b und a in $x''_{,,}$, $x'_{,,}$, $b_{,,}$ und $a_{,,}$ übergehen, und nun seyen die zu diesem $T_{(,,)}$ gehörigen Variations-Coefficienten δT, $\delta^2 T$, etc. zu finden. — Hier ist nach der Annahme

$$T_{(,,)} = (T_{,,})_{x''_{,,}, b_{,,}} - (T_{,,})_{x''_{,,}, a_{,,}} - (T_{,,})_{x'_{,,}, b_{,,}} + (T_{,,})_{x'_{,,}, a_{,,}}$$

(E. §. 34.), wo $x''_{,,}$, $x'_{,,}$ Werthe von x_1, aber $b_{,,}$, $a_{,,}$ Werthe von x sind; dagegen ist das $T_{(,,)}$ des vorhergehenden (§. 32.) nach der dortigen Annahme

$= (T_{,,})_{(x_1)_{,,}, x_{,,}}$; folglich geht das hiesige $T_{(,,)}$ und daher auch das hiesige δT, $\delta^2 T$, etc., aus dem dortigen $T_{(,,)}$ und daher auch aus dem dortigen δT, $\delta^2 T$, etc. hervor, wenn man dort statt $(x_1)_{,,}$ $x_{,,}$ erst $x''_{,,}$ $b_{,,}$ dann $x''_{,,}$ $a_{,,}$, hernach $x'_{,,}$ $b_{,,}$, zuletzt $x'_{,,}$ $a_{,,}$ beziehlich setzt, und das zweite und dritte Ergebniß von dem ersten subtrahirt, das 4te dagegen wiederum addirt, wobei jedoch nicht zu übersehen ist, daß wenn z. B. $x''_{,,}$ statt $(x_1)_{,,}$ gesetzt wird, dann nicht bloß x'' statt x_1, sondern auch $\delta x''$, $\delta^2 x''$, etc. statt δx_1, $\delta^2 x_1$, etc. gesetzt werden müssen, und so für die

(die nicht mehr x enthält) dadurch noch variirt wird, daß b in $b_\varkappa$ oder $b + \varkappa . \delta b + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 b + \ldots$ und a in $a_\varkappa$ oder $a + \varkappa . \delta a + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 a + \ldots$ übergeht. — In diesem Falle wird, wenn man die neue durch diese letzte Variation entstandene Funktion durch $(U_{b \div a})_{(\varkappa)}$ bezeichnet, dieses

$$(U_{b \div a})_{(\varkappa)} = (U_\varkappa)_{b_\varkappa \div a_\varkappa} = (U_\varkappa)_{b_\varkappa} - (U_\varkappa)_{a_\varkappa},$$

wo $b_\varkappa$ und $a_\varkappa$ Werthe von x sind, während die Coefficienten von $(U_{b \div a})_{(\varkappa)}$ durch die bloßen δ angedeutet seyn sollen. — Nun ist aber $(U_\varkappa)_{b_\varkappa}$ offenbar von dem $U_{(\varkappa)}$ des vorhergehenden (§. 28.) nur dadurch verschieden, daß hier $b_\varkappa$ steht, wo dort $x_\varkappa$, also hier beziehlich $b, \delta b, \delta^2 b$, etc. wo dort $x, \delta x, \delta^2 x$, etc. — Aehnliches von $(U_\varkappa)_{a_\varkappa}$. — Es geht also das hiesige $(U_{b \div a})_{(\varkappa)}$ aus dem $U_{(\varkappa)}$ des (§. 28.), und deshalb auch das hiesige $\delta^n(U_{b \div a})$ aus dem $\delta^n U$ desselben (§. 28.) hervor, wenn man dort, erstlich durchgehends $b, \delta b, \delta^2 b$, etc. etc., dann $a, \delta a, \delta^2 a$, etc. etc. statt beziehlich $x, \delta x, \delta^2 x$, etc, substituirt, und dann das letztere Resultat von ersterem subtrahirt. Deshalb erhält man aus (§. 28. n. 1.), für den hiesigen Fall:

1) $$\delta(U_{b \div a}) = \delta_1(U_{b \div a}) + V_b . \delta b - V_a . \delta a.$$

Und eben so aus (§. 28. n. 3.):

2) $$\delta^2(U_{b \div a}) = \delta_1^2(U_{b \div a}) + 2((\delta_1 V)_b . \delta b - (\delta_1 V)_a . \delta a) + (\partial V)_b . \delta b^2 - (\partial V)_a . \delta a^2 + V_b . \delta^2 b - V_a . \delta^2 a,$$

wo durchgehends b und a Werthe von x sind, und die Bezeichnung (E. §. 34.) statt findet.

Anmerkung. Diese letztere Aufgabe dient aber dazu, ein zwischen den Grenzen $x = b_\varkappa$ und $x = a_\varkappa$ genommenes Integral $\int V_\varkappa . \partial x$, welches eine Funktion von b, a und $\varkappa$ seyn wird (in welche $\varkappa$ doppelt eingeht, einmal in $V_\varkappa$ und dann noch in $b_\varkappa$ und $a_\varkappa$) nach ganzen steigenden Potenzen von $\varkappa$ zu entwickeln. — Und weil dieses Integral $\int_{b_\varkappa \div a_\varkappa} V_\varkappa . \partial x$ für $\varkappa = 0$ in $\int_{b \div a} V \partial x$ übergeht, so ist letzteres zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral das erste Glied dieser Entwicklung.

§. 30. Aufgabe 11.

Ist dagegen V eine Funktion der beiden (oder mehren) absolut Veränderlichen x und x_1, welche ausserdem noch die relativ Veränderlichen y, z, etc. (als Funktionen von x und x_1 gedacht) zugleich mit ihren Ableitungen beliebig nach x und x_1 genommen enthält, und denkt man sich V dadurch allein in $V_\varkappa$ übergehend, daß y, z, etc. durch $\varkappa$ variirt werden und in $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ etc. d. h. in $y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+$etc. etc., etc. übergehen (wo δy, $\delta^2 y$, etc. etc. δz etc. mit y, z, etc. zugleich als Funktionen der beiden absolut Veränderlichen x und x_1 angesehen werden). Man denkt sich nun noch x und x_1 durch $\varkappa$ variirt, also in $x_\varkappa$ und $(x_1)_\varkappa$ übergehend; und bezeichnet diesen neuen Zustand von V durch $V_{(\varkappa)}$, so wie die Variations-Coefficienten von $V_\varkappa$ und $V_{(\varkappa)}$ wie bisher beziehlich durch δ_1 und δ; man soll δV und $\delta^2 V$ ausgedrückt finden.

Auflösung. Nach (§. 4. §. 5.), und so verfahrend wie (§. 26.), erhält man augenblicklich:

$$1)\quad \delta V=\delta_1 V+\frac{\partial V}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial V}{\partial x_1}.\delta x_1$$

und

$$2)\quad \delta^2 V=\delta_1^2 V+2.\frac{\partial.\delta_1 V}{\partial x}.\delta x+2.\frac{\partial.\delta_1 V}{\partial x_1}.\delta x_1+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\delta x^2+$$
$$2.\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial x_1}.\delta x.\delta x_1+\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}.\delta x_1^2+\frac{\partial V}{\partial x}.\delta^2 x+\frac{\partial V}{\partial x_1}.\delta^2 x_1.$$

§. 31. Zusatz 1.

Wäre alles wie im vorhergehenden (§. 30.), aber noch $T=\int_{b+a}\int_{x'+x'}V.\partial x_1.\partial x$ und $T_\varkappa$, so wie $T_{(\varkappa)}$, was aus T wird, wenn $V_\varkappa$ oder $V_{(\varkappa)}$ statt V gesetzt werden sollte, und die zugehörigen Coefficienten beziehlich durch δ_1 und δ bezeichnet, so hat man (nach §. 6.):

1) $\delta_1 T = \int_{b\div a}\int_{x''\div x'}(\delta_1 V)\cdot\partial x_1\cdot\partial x$,

und 2) $\delta T = \int_{b\div a}\int_{x''\div x'}(\delta V)\cdot\partial x_1\cdot\partial x$;

oder, wenn man statt δV den (§. 30. n. 1.) gefundenen Werth setzt:

3) $\delta T = \delta_1 T + \int_{b\div a}\int_{x''\div x'}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\delta x + \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\delta x_1\right)\partial x_1\cdot\partial x$.

Sind nun x'' und x' von x unabhängig und b und a von x_1, so ist die Folge der Integration gleichgültig, und man erhält daher, in so ferne δx und δx_1 sowohl nach x als auch nach x_1 als constant angesehen werden:

4) $\delta T = \delta_1 T + \delta x\cdot\int_{x''\div x'}(V_{b\div a})\cdot\partial x_1 + \delta x_1\cdot\int_{b\div a}(V_{x''\div x'})\partial x$. *)

§. 32. Zusatz 2.

Verschieden hievon ist dagegen diese Aufgabe: Es ist V und $V_{\times}$ wie (§. §. 30. 31.) gegeben, aber

$T = \int\int V\cdot\partial x_1\cdot\partial x$ und $T_{\times} = \int\int (V_{\times})\cdot\partial x_1\cdot\partial x$,

wo jede der beiden Integrationen mit einem bestimmten Grenzwerthe anfangen, jedes Integral aber auch unbestimmt bleiben soll, so daß T und $T_{\times}$ bestimmte Funktionen von x und x_1 sind. In diesem $T_{\times}$ denke man sich nun noch $x_{\times}$ und $(x_1)_{\times}$ statt x und x_1 gesetzt, was daraus wird, durch $T_{(\times)}$, und die Coefficienten dieser letztern Reihe durch δ, so wie alle zu $V_{\times}$ und $T_{\times}$ gehörigen durch δ_1 bezeichnet, und bestimme nun δT, $\delta^2 T$, etc. etc.

Unter diesen Voraussetzungen befindet sich das T hier, genau in demselben Falle, wie das V des (§. 30.), während hier noch $\frac{\partial T}{\partial x} = \int V\cdot\partial x_1$ und $\frac{\partial T}{\partial x_1} = \int V\cdot\partial x$ ist, in so ferne das erste Integral mit $x_1 = x'$ das andere mit

---

*) Also nicht

$$\delta T = \delta_1 T + \delta b\cdot\int_{x''\div x'}(V_b)\cdot\partial x_1 - \delta a\cdot\int_{x''\div x'}(V_a)\cdot\partial x_1 + \delta x''\cdot\int_{b\div a}(V_{x''})\cdot\partial x - \delta x'\cdot\int_{b\div a}(V_{x'})\cdot\partial x$$

(Vergl. Note zu §. 27.)

$x = a$ anfängt, x' und a aber nach x und x_1 constant sind.

Folglich aus (§. 30. n. 1.), T statt des dortigen V setzend

1) $\delta T = \delta_1 T + \delta x . \int_{x_1 \div x'} V . \partial x_1 + \delta x_1 . \int_{x \div a} V . \partial x.$

Und eben so ergiebt sich dann:

2) $\delta^2 T$ ohne weiters. (Vergl. §. 28.).

§. 33. Zusatz 3.

An diese letztere Aufgabe schließt sich aber zunächst folgende an: Es ist V, $V_{,,}$, T, $T_{,,}$ wie in dem vorhergehenden (§. 32.), und die Coefficienten von $V_{,,}$, $T_{,,}$ seyen durch δ_1 angedeutet. Dagegen sey unter $T_{(,,)}$ das verstanden, was aus $(T_{,,})_{x'' \div x', b \div a}$ (E. §. 58.) als Funktion von x'', x', b und a (die nicht mehr x_1 und nicht mehr x enthält) wird, so oft x'', x', b und a in $x''_{,,}$, $x'_{,,}$, $b_{,,}$ und $a_{,,}$ übergehen, und nun seyen die zu diesem $T_{(,,)}$ gehörigen Variations-Coefficienten δT, $\delta^2 T$, etc. zu finden. — Hier ist nach der Annahme

$$T_{(,,)} = (T_{,,})_{x''_{,,}, b_{,,}} - (T_{,,})_{x''_{,,}, a_{,,}} - (T_{,,})_{x'_{,,}, b_{,,}} + (T_{,,})_{x'_{,,}, a_{,,}}$$

(E. §. 34.), wo $x''_{,,}$, $x'_{,,}$ Werthe von x_1, aber $b_{,,}$, $a_{,,}$ Werthe von x sind; dagegen ist das $T_{(,,)}$ des vorhergehenden (§. 32.) nach der dortigen Annahme

$= (T_{,,})_{(x_1)_{,,}, x_{,,}}$; folglich geht das hiesige $T_{(,,)}$ und daher auch das hiesige δT, $\delta^2 T$, etc., aus dem dortigen $T_{(,,)}$ und daher auch aus dem dortigen δT, $\delta^2 T$, etc. hervor, wenn man dort statt $(x_1)_{,,}$ $x_{,,}$ erst $x''_{,,}$, $b_{,,}$ dann $x''_{,,}$, $a_{,,}$ hernach $x'_{,,}$, $b_{,,}$, zuletzt $x'_{,,}$, $a_{,,}$ beziehlich setzt, und das zweite und dritte Ergebniß von dem ersten subtrahirt, das 4te dagegen wiederum addirt, wobei jedoch nicht zu übersehen ist, daß wenn z. B. $x''_{,,}$ statt $(x_1)_{,,}$ gesetzt wird, dann nicht bloß x'' statt x_1, sondern auch $\delta x''$, $\delta^2 x''$, etc. statt δx_1, $\delta^2 x_1$, etc. gesetzt werden müssen, und so für die

übrigen. — Man erhält daher aus (§. 32. n. 1.) für den hiesigen Fall, weil noch

$\int_{x_1+x'} V . \partial x_1 = 0$ wird, für $x_1 = x'$, und dasselbe auch mit $\int_{x+a} V . \partial x$ für $x = a$ der Fall ist:

1) $\delta T = \delta_1 T + \delta b . \int_{x''+x'} (V_b) . \partial x_1 - \delta a . \int_{x''+x'} (V_a) . \partial x_1$
$+ \delta x'' . \int_{b+a} (V_{x''}) . \partial x - \delta x' . \int_{b+a} (V_{x'}) . \partial x.$

Eben so findet man nachgehends auch

2) $\delta^2 T$, was wir hier jedoch nicht weiter verfolgen wollen.

§. 34. Zusatz 4.

Verschieden von allen diesen Aufgaben (§. §. 30—33.) ist dagegen wieder nachstehende, und diese gerade allein hat für uns, ihrer Anwendungen wegen auf die Lehre vom Größten und Kleinsten, einen besonderen Werth.

Es ist nehmlich wieder, wie bisher in den (§. §. 30—33.) $V = f(x, x_1, y, y_1^0, y_0^1, y_2^0, y_1^1, y_0^2, \ldots z$, etc. etc.) und $V_\varkappa$ das, was aus V dadurch allein wird, daß y in $y_\varkappa$, z in $z_\varkappa$ etc. etc. übergehen. Ferner sey:

1) $U = \int_{x''+x'} V . \partial x_1$

und 2) $T = \int_{b+a} U \partial x = \int_{b+a} \int_{x''+x'} V \partial x_1 \partial x;$

3) $U_\varkappa = \int_{x''+x'} (V_\varkappa) . \partial x_1$ und 4) $T_\varkappa = \int_{b+a} (U_\varkappa) . \partial x;$

und alle hiezugehörigen Variations-Coefficienten seyen durch δ_1 angedeutet. Ferner sey noch:

5) $U_{(\varkappa)} = \int x''_\varkappa + x'_\varkappa (V_\varkappa) . \partial x_1$, also $U_{(\varkappa)} = (U_\varkappa) x''_\varkappa, x'_\varkappa$ (E. §. 34.), wo $x''_\varkappa$, $x'_\varkappa$ Werthe von x'' und x' sind; und noch

6) $T_{(\varkappa)} = \int_{b+a} (U_{(\varkappa)}) . \partial x,$

dabei die zu $U_{(\varkappa)}$ und $T_{(\varkappa)}$ gehörigen Variations-Coefficienten durch die bloßen δ angedeutet. — Zuletzt sey noch

7) $T_{[\varkappa]} = \int_{b_\varkappa + a_\varkappa} (U_{(\varkappa)}) . \partial x$, also $T_{[\varkappa]} = (T_{(\varkappa)}) b_\varkappa, a_\varkappa$, wo $b_\varkappa$, $a_\varkappa$ Werthe von b und a sind (E. §. 34.), und die Variations-Coefficienten von $T_{[\varkappa]}$ seyen durch $'\delta$ angedeutet; und nun $'\delta T$, $'\delta^2 T$, etc. zu entwickeln.

Erstlich ist nach (§. 29.):

8) $\delta U = \delta_1 U + V_{x''} . \delta x'' - V_{x'} . \delta x'$

und dabei (nach 5. 6):

9) $\delta_1 T = \int_{b \div a} (\delta_1 U) . \partial x$.

Dann wiederum nach (§. 6.):

10) $\delta T = \int_{b \div a} (\delta U) . \partial x$, oder nach (8. 9.)

11) $\delta T = \delta_1 T + \int_{b \div a} (V_{x''} . \delta x'' - V_{x'} . \delta x') . \partial x$.

Und nun nochmals nach (§. 29.):

12) $'\delta T = \delta T + U_b . \delta b - U_a . \delta a$ d. h. nach (11.)

$= \delta_1 T + \int_{b \div a} (V_{x''} . \delta x'' - V_{x'} . \delta x') . \partial x + U_b . \delta b - U_a . \delta a$

oder

13) $'\delta T = \delta_1 T + (\int V_{x''} \delta x'' . \partial x)_{b \div a} - (\int V_{x'} \delta x' . \partial x)_{b \div a}$
$+ ((\int V . \partial x_1)_{x'' \div x'})_b . \delta b - ((\int V \partial x_1)_{x'' \div x'})_a . \delta a$,

wo durchgehends die Bezeichnung (E. §. §. 34. 49.) gebraucht ist, und wo x'' und x' Werthe von x_1, und b und a Werthe von x sind.

Dieses Resultat gilt aber, es mögen die Grenzwerthe x'' und x', zwischen denen das erste Integral nach x_1 genommen werden soll, selbst noch Funktionen von x seyn (wo dann auch $\delta x''$, $\delta^2 x''$, etc. $\delta x'$, $\delta^2 x'$, etc., so wie x'' und x' selbst, als Funktionen von x angesehen werden müssen) oder diese Grenzwerthe von x_1 mögen von x unabhängig seyn. — In diesem letztern Falle (wo x'' und x' nach x constant sind) sind aber auch $\delta x''$, $\delta x'$, etc. etc. nach x constant anzusehen, und dann läßt sich die Formel (n. 2.) auch so schreiben:

14) $'\delta T = \delta_1 T + \delta x'' . (\int V_{x''} . \partial x)_{b \div a} - \delta x' . (\int V_{x'} . \partial x)_{b \div a}$
$+ \delta b . (\int V_b . \partial x_1)_{x'' \div x'} - \delta a . (\int V_a . \partial x_1)_{x'' \div x'}$.

Auf ähnlichem Wege läßt sich aber auch $'\delta^2 T$ finden.

Anmerkung 1. Diese letztere Aufgabe dient dazu, das doppelte Integral $\int\int V_x . \partial x_1 . \partial x$, wovon das erste zwischen den Grenzen $x_1 = x'_x$ und $x_1 = x''_x$, das zweite dagegen zwischen den Grenzen $x = a_x$ und $x = b_x$ genommen ist (es mögen x'' und x' noch als Funktionen von x, oder nach x constant gedacht seyn), also

$$\int b_x \div a_x (\int x''_x \div x'_x (V_x) . \partial x_1) . \partial x$$

nach ganzen steigenden Potenzen von x zu entwickeln; und da dieses Integral für $x = 0$ in

$$\int b + a(\int x'' + x' . V . \partial x_1) . \partial x$$

übergeht, so ist letzteres das erste Glied dieser Entwicklung, während $\varkappa . \delta T$ das zweite Glied derselben seyn muß.

Anmerkung 2. Wir glauben aber diese Lehren in den letztern Paragraphen weit genügender behandelt zu haben, als man sie in den ausführlichsten Schriften über diesen Gegenstand behandelt findet, wo so vieles noch unbestimmt und dunkel, manches sogar auch unrichtig zu seyn scheint. Man vergleiche deshalb damit

Leçons sur le Calcul d. f. 1806. Leç. XXII. *La croix*, Traité d. Calc. diff. et d. Calc. int. T. II. 1814. Chap. X. „Analyt. Darstellung d. Variationsrechnung." Berlin 1823.

§. 35. Lehrsatz.

Ist gegeben die Gleichung

$\varphi(x, y, y_1, y_2 \dots z, z_1, z_2, \dots U, U_1, U_2, \dots) = 0$ oder $\varphi = 0$, wo y_1, y_2, etc. die Ableitungen von y, eben so z_1, z_2, etc. etc. die Ableitungen von z, und U_1, U_2, etc. die Ableitungen von U bedeuten, alle Ableitungen nach dem absolut Veränderlichen x (oder auch nach mehreren absolut veränderlichen x, x_1, etc. etc.) genommen, und soll auch noch für jedes $\varkappa$ (also unabhängig von $\varkappa$)

$\varphi(y_\varkappa, (y_1)_\varkappa, (y_2)_\varkappa \dots z_\varkappa, (z_1)_\varkappa, (z_2)_\varkappa$, etc. $U_\varkappa, (U_1)_\varkappa, (U_2)_\varkappa$, etc.$) = 0$, welche Gleichung durch $\varphi_\varkappa = 0$ bezeichnet seyn mag, statt finden, so daß die Variationen des einen Veränderlichen z. B. von U, von den Variationen der übrigen Veränderlichen, y, z, etc. etc. abhängig sind; so ist allemal, außer $\varphi = 0$ auch noch $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, $\delta^3\varphi = 0$, $\delta^4\varphi = 0$, etc. etc.; und diese Gleichungen dienen dazu, um δU, $\delta^2 U$, etc. etc. in δy, $\delta^2 y$, etc. etc. δz, $\delta^2 z$, etc. etc. ausgedrückt zu liefern.

Beweis. Da nach der Voraussetzung $\varphi_\varkappa$ in Bezug auf $\varkappa$ identisch $= 0$ ist, (d. h. für jeden Werth von $\varkappa$, unabhängig von $\varkappa$), so sind, wenn man dieses $\varphi_\varkappa$ nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ entwickelt sich denkt, nothwendig auch die einzelnen Coefficienten der Potenzen von $\varkappa$, also

$\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, $\delta^3\varphi$, etc. etc. bis in's unendliche der Null gleich. Welches zu erweisen war.

§. 36. Zusatz 1.

Ist bloß gegeben $\varphi(y, z)=0$, und $\varphi(y_{\prime\prime}, z_{\prime\prime})=0$, so werden diese Gleichungen $\delta\varphi=0$, $\delta^2\varphi=0$, etc. etc. folgende Form annehmen:

$$1)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\delta z=0,$$

$$2)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.\delta y^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y.\partial z}.\delta y.\delta z+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.\delta z^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta^2 y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\delta^2 z=0$$

u. s. w. f.

aus welchen Gleichungen, wie man sieht, augenblicklich δz, $\delta^2 z$, etc. in δy, $\delta^2 y$ etc. sich ausdrücken lassen.

§. 37. Zusatz 2.

Ist gegeben die Gleichung

$$1)\quad \varphi(y, \partial y, \partial^2 y, \ldots \partial^m y, z, \partial z, \partial^2 z \ldots, \partial^n z)=0$$

welche auch noch statt finden soll, wenn y und z in $y_{\prime\prime}$ und $z_{\prime\prime}$ übergehen, während ∂ die Ableitungen nach allem x anzeigen (welches x außerdem in φ auch noch explicit vorkommen kann), so gestaltet sich die Gleichung $\delta\varphi=0$ jetzt so:

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial y)}.\partial\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^2 y)}.\partial^2\delta y+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^m y)}.\partial^m\delta y \\ +\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\delta z+\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial z)}.\partial\delta z+\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^2 z)}.\partial^2\delta z+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^n z)}.\partial^n\delta z \end{array}\right\}=0$$

wo z. B. $\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^n z)}$, die Ableitung von φ nach dem Veränderlichen $\partial^n z$ genommen bedeutet, in so ferne φ diesen Ausdruck $\partial^n z$ explicit enthält.

§. 38. Zusatz 3.

In dem allgemeinen Falle des Lehrsatzes (§. 35.) selbst, wenn die Ableitungen von y bis zur m^{ten} Ordnung, von z bis zur n^{ten} Ordnung, u. s. w. und von U bis zur p^{ten} Ord-

nung vorkommen sollten, würde die Gleichung $\delta\varphi = 0$ die Form annehmen

$$A)\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial y)}.\partial\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^2 y)}.\partial^2\delta y + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^m y)}.\partial^m\delta y \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial z}.\delta z + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial z)}.\partial\delta z + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^2 z)}.\partial^2\delta z + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^n z)}.\partial^n\delta z \\ + \text{etc. etc. etc. etc.} \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial U}.\delta U + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial U)}.\partial\delta U + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^2 U)}.\partial^2\delta U + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^p U)}.\partial^p\delta U \end{array}\right\} = 0$$

aus welcher durch Integration δU zu bestimmen ist.

§. 39. Zusatz 4.

Will man aber $(\delta U)_b$ nur angeben, d. h. nur das, was aus δU wird, wenn man statt alles explicit und implicit vorkommenden x, den (constanten) Werth b setzt, so kann man das Verfahren (E. §. 83.) anwenden, und so unter gewissen Voraussetzungen sein Ziel erreichen.

Man multiplicirt nehmlich die Gleichung (A.) mit einer unbestimmten Funktion von x, welche λ seyn mag, und nimmt dann die Integrale, so erhält man:

$$1)\ \int_{b+a} S.\left[\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^a y)}.\partial^a\delta y\right].\partial x + \int_{b+a} S.\left[\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^a z)}\partial^a\delta z\right].\partial x +$$
$$+ \text{etc. etc. etc.} + \int_{b+a} S.\left[\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^a U)}.\partial^a\delta U\right]_{a+b=p} = 0.$$

Integrirt man aber das letzte Integral theilweise nach (E. §. 65.) und setzt die Summe der ersten Integrale, nehmlich:

$$2)\ \int_{b+a} S.\left[\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^a y)}.\partial^a\delta y\right].\partial x + \int_{b+a} S.\left[\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^a z)}.\partial^a\delta z\right].\partial x$$
$$+ \text{etc. etc. etc.} = -(X_1)_{b+a}$$

so erhält man

$$3)\quad \int_{b+a} S.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^a U)}\right)\right]_{a+b=p}.\delta U.\partial x$$
$$+ S.\left[(-1)^c.\partial^c\left(\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial^{c+b+1} U)}\right).\partial^b\delta U\right]_{b+c+b=p-1} = (X_1)_{b+a}$$

Die Lehre vom Größten und Kleinsten.

§. 1. Erklärung.

Wie auch V aus einem oder mehr Veränderlichen als Ur-, als Differential- oder als Integral-Funktion zusammengesetzt seyn mag, so heißt immer ein Werth von V (für bestimmte Werthe der Veränderlichen, von denen V abhängt) in Bezug auf bestimmt bezeichnete, zu nächst größern und nächst kleinern Werthen der absolut Veränderlichen, gehörigen Werthe desselben V, ein Größtes (Maximum) oder ein Kleinstes (Minimum), wenn dieser Werth von V größer ist als jeder der bezeichneten Nachbar-Werthe von V, oder kleiner als jeder derselben.

Anmerkung 1. Wir nennen aber a größer als b, und b kleiner als a, und schreiben also $a > b$ oder $b < a$, wenn die Differenz $a - b$ eine absolute (positive) Zahl ist. — Nach diesem Begriff ist jede positive (absolute) Zahl größer als Null, und Null so wie jede absolute (positive) Zahl größer als jede negative Zahl; und von zwei negativen Zahlen $-p$ und $-q$, ist $-p > -q$ wenn $p < q$, d. h. ist diejenige die größere, deren absolutes Glied p kleiner ist, als das absolute Glied q der andern negativen Zahl $-q$. — Eine negative Zahl als Minimum unter negativen Zahlen als Nachbarwerthen, ist daher ein Maximum, sobald man sowohl bei ihr als auch bei ihren Nachbarwerthen bloß die absoluten Glieder berücksichtigt; und umgekehrt.

Anmerkung 2. Daß die Nachbar-Werthe von V, in Bezug auf welche ein gegebener Werth von V ein Größtes oder Kleinstes wer-

den soll, genau bezeichnet seyn müssen, ist unumgänglich nothwendig, wenn jede Untersuchung darüber, einem bestimmten Gegenstande entsprechen oder einen bestimmten Sinn haben soll; weil derselbe Werth von V in Bezug auf zwei solche bestimmt bezeichnete Nachbar-Werthe ein **Größtes**, in Bezug auf zwei andere Nachbar-Werthe aber zu **gleicher Zeit** ein **Kleinstes** seyn kann. — Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, denke man sich die Ordinate einer krummen Oberfläche gegeben durch die Gleichung $V = \varphi(x, y)$, die sich auf 3 rechtwinklige, durch (x, y), (x, V), (y, V) bezeichnete Ordinaten-Ebenen bezieht. Durch den, zu bestimmten Werthen von x und von y gehörigen Punkt M der Oberfläche, lege man zwei Schnitte, den einen parallel mit der Ebene (y, V) den andern parallel mit (x, V); so kann die Ordinate in M, ein **Maximum** seyn in Bezug auf die beiden in dem erstern Schnitte liegenden nächstangrenzenden Ordinaten (welche durch $\varphi(x+h, y)$ für dieselben Werthe von x und y und ein bald positiv, bald negativ, jedesmal aber ein Moment des Verschwindens gedachtes h, ausgedrückt seyn werden), während dieselbe Ordinate in M zugleicher Zeit ein **Minimum** seyn kann, in Bezug auf diejenigen beiden nächstangrenzenden Ordinaten, welche in dem andern Schnitte liegen, und welche durch $\varphi(x, y+h)$ ausgedrückt seyn können. — Endlich kann auch die Ordinate in M ein Maximum seyn, oder ein Minimum, in Bezug auf **alle** rings herum liegenden nächstangrenzenden Ordinaten zugleich, die durch $\varphi(x+h, y+k)$ ausgedrückt seyn werden, wenn man sich unter x und y die Coordinaten des Punktes M, dagegen h und k beliebig und von einander unabhängig bald positiv bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens sich denkt. — Eben so kann man aber auch durch M einen Schnitt in ganz beliebiger Richtung legen, und die Ordinate in M als ein Maximum oder ein Minimum haben wollen, in Bezug auf die **in diesem Schnitte liegenden**, der Ordinate in M **zunächst** vorhergehenden und **zunächst** folgenden Ordinaten.

§. 2. Zusatz 1.

Stellt y einen beliebigen constanten übrigens bestimmt gedachten reellen Werth vor; so kann man seine nächst größern und nächst kleinern Werthe durch $y + \varkappa$ ausdrücken, wenn $\varkappa$ bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens gedacht wird. Diese nächst größern und nächst kleinern Werthe kann man aber auch durch $y + \varkappa . \partial y$ vorstellen lassen, wo ∂y ein beliebiger ebenfalls

constanter Werth seyn mag; auch werden solche dem y nächst vorhergehende und nächst folgende Werthe durch

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \frac{x^3}{3!} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

d. h. durch eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortgehende unendliche Reihe ausgedrückt*), der man jedesmal die vorstehende Form geben kann, wo δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. beliebige ebenfalls constante, Coefficienten vorstellen; wenn nur x bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens gedacht wird. — Es enthält aber die letztere Reihe den zweiten Ausdruck $y + x \cdot \delta y$ als denjenigen besondern Fall in sich, in welchem die folgenden Coefficienten $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. etc. der Null gleich gedacht sind, während dieser Ausdruck $y + x \cdot \delta y$ wiederum den einfachsten $y + x$ als denjenigen besondern Fall in sich schließt, wo $\delta y = 1$ genommen ist. —

Wären nun die verschiedenen Werthe von y ganz unabhängig (übrigens, wie dies hier immer vorausgesetzt wird, stetig an einander liegend und reel gedacht) so wäre es am einfachsten, die dem Werthe y nächst angrenzenden Werthe bloß durch $y + x$ auszudrücken. — Sollten aber diese Werthe von y nicht so ganz unabhängig, sondern noch gewissen Bedingungen unterworfen seyn, so können diese Bedingungen vielleicht nicht erlauben, den zunächst angrenzenden Werthen von y diese einfachste Form $y + x$ zu geben, und es ist also rathsamer, gleich anfänglich die zunächst angrenzenden Werthe unter der allgemeinen Form

$$y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \frac{x^3}{3!} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots \quad \text{oder} \quad y.$$

---

*) Weil bei einem so klein (im Moment des Verschwindens) gedachten x, das Zeichen des Zuwachses $x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y +$ etc. etc. bloß von dem Zeichen des ersten Gliedes $x \cdot \delta y$ abhängt, also mit dem von x zugleich sich ändert.

(Var. §. §. 1 — 4.) anzunehmen, um in jedem vorkommenden besondern Falle den vorhandenen Bedingungen (in Bezug auf die Coefficienten $\delta y, \delta^2 y, \ldots$) noch genügen zu können. (Vergl. Var. §. 3. Anmerk. 3.).

§. 3. Zusatz 2.

Sollte der im vorhergehenden (§. 2.) durch y vorgestellte Werth noch x enthalten, also eine Funktion von x seyn, die ihren Werth mit x zugleich ändert, so kann man sich zwei, dieser Funktion von x nächstangrenzende Funktionen von x denken, welche mit y zugleich für jeden andern Werth von x, 3 andere, aber jedesmal stetig auf einander folgende Werthe von y liefern. — Diese der Funktion y nächstangrenzenden Funktionen, wird man offenbar auch durch

$$y, \quad \text{oder} \quad y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{3!} . \delta^3 y + \ldots$$

vorstellen, und dabei $\delta y, \delta^2 y, \delta^3 y$, etc. als Funktionen von x, oder als nach x constant, ja außer δy auch jeden einzelnen dieser Coefficienten $=0$ denken können. So lange man aber die Gesetze nicht kennt, nach welchen die für jedes x dem y nächstangrenzenden Werthe sich richten müssen, oder so lange man sich willkührliche solche Gesetze, als möglich vorhandene denkt, muß man, um in jedem besondern Falle allen diesen möglichen Gesetzen entsprechen zu können, im Allgemeinen sich diese $\delta y, \delta^2 y$, etc. etc. mit y zugleich als willkührliche Funktionen von x denken, die, wie dies in gegebenen Fällen gefordert seyn kann, mit x zugleich ihre Werthe ändern, so daß das Gesetz des (positiven oder negativen) stetigen Zuwachses von y für jeden andern Werth von x, ebenfalls als ein anderes erscheinen kann.

Anmerkung. Es darf nur in einer Untersuchung y als Funktion von x, und auch noch ihre Ableitung nach x, ∂y nehmlich, vorkommen, so würden, wenn die nächstangrenzenden Werthe von y durch

$y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y +$ etc. etc. vorgestellt sind, die da-

durch völlig bestimmten nächstangrenzenden Werthe von ∂y durch

$\partial\cdot(y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+\text{etc}\ldots)$ ausgedrückt, und offenbar von ∂y nicht verschieden seyn, wenn man δy, $\delta^2 y$, etc. nicht ebenfalls als Funktionen von x sich denken wollte.

§. 4. Zusatz 3.

Dem vorhergehenden gemäß ist es nun leicht einzusehen, daß, wenn y constant, oder eine Funktion von x, oder eine Funktion mehrer absolut Veränderlichen x, x_1, x_2, etc. seyn sollte, die dem y nächst größern und nächst kleinern Werthe von y, im Allgemeinen durch

$$y_{\varkappa} \quad \text{oder} \quad y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+\frac{\varkappa^3}{3!}.\delta^3 y+\text{etc. etc.},$$

d. h. mittelst des durch $\varkappa$ variirten y (Var. §. 3.), vorgestellt werden müssen, wo δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. etc. im Allgemeinen mit y zugleich entweder constant, oder als Funktionen von x oder als Funktionen mehrer Veränderlichen x, x_1, x_2, etc. etc. gedacht sind, während man $\varkappa$ bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens nimmt. (Vergl. Var. §. 3.)

Anmerkung. Es ist übrigens nicht zu läugnen, daß wenn zwischen y und z die Gleichung $\varphi(y, z)=0$ existirt, und für jeden veränderten Zustand von y und z noch existiren soll, der Zuwachs von z, wenn y in $y+\varkappa.\delta y$ übergeht, für besondere Werthe von y, nicht nothwendig nach ganzen positiven, sondern auch nach gebrochenen Potenzen von $\varkappa$ fortgehen könnte (E. §. §. 35 — 37.), so daß, um diesen Zuwachs noch allgemeiner und so auszudrücken, daß solcher alle möglichen Fälle umfaßt, man ihm die Form

$\varkappa^{\mu}.M+\varkappa^{\nu}.N+\varkappa^{\varrho}.P+$ etc. etc. geben, und nicht bloß M, N, P, etc. etc. sondern auch μ, ν, ϱ etc. unbestimmt lassen müßte, um für diese letztern sowohl noch ganze als auch noch gebrochene Zahlen setzen zu können, wie solches jeder besondere Fall erfordern dürfte. — Die folgenden Principien des Größten und Kleinsten zeigen aber deutlich, wie die Incremente der vorkommenden Veränderlichen jedesmal unter der Voraussetzung genommen werden können und müssen, daß die Veränderlichen selbst alle noch ganz all-

gemein gedacht sind, in welchem Falle nach (E. §. §. 35 — 37.) die Incremente der abhängigen Veränderlichen nothwendig nach ganzen Potenzen von x fortgehen müssen, wenn auch die postulirten Incremente der unabhängigen Veränderlichen entweder nur unter der Form $x.m$ oder unter der allgemeinern Form $x.M_1+x^2.M_2+x^3.M_3+$ etc. etc. genommen seyn sollten.

§. 5. Zusatz 4.

Wenn aber die den absolut Veränderlichen z. B. y, etc. etc. nächst vorhergehenden und nächst folgenden Werthe, durch y_x oder $y+x.\delta y+$etc. d. h. durch beliebige Variation des y (Var. §. 3.) sich ausdrücken lassen, so werden auch die dazu gehörigen Werthe der abhängig Veränderlichen, und namentlich dann auch der Funktion V, welche das Maximum oder das Minimum werden soll, an einander nächst angrenzende seyn, in so ferne sie für $x=0$ auf V selbst sich zurückziehen, und allemal nach steigenden Potenzen von x entwickelt werden können; und denkt man sich die absolut Veränderlichen noch ganz allgemein, so werden die, zu dem im variirten Zustande befindlichen y, etc. gehörigen Werthe von V allemal nach steigenden ganzen positiven Potenzen von x fortgehen, das durch x variirte V bilden (Var. §. 3.) und durch

$$V_x \quad \text{oder} \quad V+x.\delta V+\frac{x^2}{2!}.\delta^2 V+ \text{etc. etc.}$$

ausgedrückt seyn, wo aber x bald positiv, bald negativ, jedoch jedesmal im Moment des Verschwindens genommen ist, und wo V_x und daher auch die Coefficienten δV, $\delta^2 V$, etc. gegeben sind, durch die nähere Bestimmung der Nachbarwerthe von V, in Bezug auf welche gerade dieses V ein Maximum oder ein Minimum werden soll. (Vergl. §. 1. Anmerk. 2. und Var. §. §. 1 — 4.).

§. 6. Lehrsatz.

Für diejenigen Werthe der in V vorkommenden absolut Veränderlichen, welche diese Funktion V zu einem Maxi-

mum oder Minimum machen — in Bezug auf bestimmt angegebene, im allgemeinen durch

$$V_x \quad \text{oder} \quad V + x . \partial V + \frac{x^2}{2!} . \partial^2 V + \frac{x^3}{3!} . \partial^3 V + \text{etc. etc. etc.}$$

vorgestellte zu den nächst größern und nächst kleinern Werthen der absolut Veränderlichen, gehörigen Werthe von V — muß nothwendig

$$\partial V = 0 \quad \text{oder} \quad \partial V = \infty \quad \text{seyn.}$$

Beweis. Wenn auch diese Nachbar-Werthe von V, so lange alle Veränderlichen noch ganz allgemein gedacht sind, als nach ganzen positiven Potenzen von x fortgehend, und die Form

$$V + x . \partial V + \frac{x^2}{2!} . \partial^2 V + \frac{x^3}{3!} . \partial^3 V + \ldots\ldots$$

habend gedacht werden müssen, so kann es sich doch treffen, daß für diejenigen besonderen Werthe der absolut Veränderlichen, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, diese Nachbarwerthe von V auch nach gebrochenen Potenzen von x fortgehen. — In jedem Falle wird man aber doch diese Nachbarwerthe von V, nach ganzen oder gebrochenen steigenden Potenzen von x entwickeln können, so daß sie allgemein die Form

$$V + x^\mu . P + x^\nu . Q + \text{etc. etc.} \quad \text{haben.}$$

Da nun, im Falle V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn soll, der Zuwachs $x^\mu . P + x^\nu . Q + \text{etc. etc.}$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ seyn muß, für jedes im Moment des Verschwindens bald positiv, bald negativ gedachte x; da ferner das Zeichen dieses Zuwachses für ein so klein gedachtes x, nur von dem Zeichen des ersten Gliedes $x^\mu . P$ abhängt, so darf dieses Glied mit dem Zeichen von x sein Zeichen nicht zugleich ändern; und es muß daher μ entweder eine ganze gerade Zahl oder doch

eine in den kleinsten Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl mit geradem Zähler seyn, so daß diese Bedingung nothwendig ist und auch ausreicht, um V als ein Maximum oder Minimum zu erkennen. Im Falle V ein Maximum oder Minimum seyn soll, kann also μ nicht 1 seyn (weil es überhaupt nicht ungerade seyn kann), sondern es ist solches entweder größer als 1, oder kleiner. Ist aber $\mu > 1$, so ist nach (E. §. 43. in Verbindung mit Var. §. 4.) $\delta V = 0$, und ist $\mu < 1$, so ist $\delta V = \infty$; folglich der Lehrsatz erwiesen.

Anmerkung 1. Es setzt aber dieser Lehrsatz ausdrücklich voraus, daß in der Entwicklung der Reihe

$$V + x . \delta V + \frac{x^2}{2!} . \delta^2 V + \text{etc. etc.}$$

alle Veränderlichen ganz allgemein gedacht sind, daß also nicht bloß die unabhängigen Veränderlichen in y, etc. etc., sondern auch die abhängig Veränderlichen z, etc. etc., die in V vorkommen, in ihrem variirten Zustande, nach positiven und ganzen Potenzen von x fortgehende Reihen bilden, bezeichnet durch

$$y + x . \delta y + \frac{x^2}{2!} . \delta^2 y + \text{etc.}, \quad \text{etc. etc. etc.},$$

und $$z + x . \delta z + \frac{x^2}{2!} . \delta^2 z + \text{etc.}, \quad \text{etc. etc. etc.}$$

Anmerkung 2. Die Gleichung $\delta V = 0$ oder $\delta V = \infty$ kann aber wieder in mehrere andere Gleichungen zerfallen, je nachdem dieses δV noch willkührliche Ausdrücke enthalten kann, und unabhängig von diesen, $= 0$ oder $= \infty$ werden soll.

§. 7. Zusatz 1.

Um daher alle Werthe der in V vorkommenden Veränderlichen, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen können, zu finden, muß man erstlich

$\delta V = 0$ setzen, und daraus die gedachten Werthe zu bestimmen suchen. Nachgehends, um kein System der gesuchten Werthe zu verfehlen, setzt man auch noch

$\delta V = \infty$ und sucht die Veränderlichen dieser Gleichung entsprechend, zu bestimmen. Weil

aber jedes so gefundene System von Werthen dieser Veränderlichen nur entweder $\delta V = 0$ oder $\delta V = \infty$ macht, so sind zwar alle diejenigen darunter, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen (§. 6.); dagegen muß gar nicht nothwendig allen diesen Systemen von Werthen, welche $\delta V = 0$ oder $\delta V = \infty$ machen, auch diese letztere Eigenschaft zukommen.

Man muß daher noch jedes der gefundenen Systeme von Werthen der Veränderlichen, welche $\delta V = 0$ oder $\delta V = \infty$ machen, statt der Veränderlichen in V_x substituiren, und die so entstehende Funktion V_x nach steigenden Potenzen von x entwickeln, welche Entwicklung allemal die Form

$$V + x^{\mu} . P + x^{\nu} . Q + \text{etc. etc.}$$

annehmen muß; und dann findet ein Maximum oder Minimum statt, aber auch nur dann, wenn μ entweder eine ganze gerade Zahl, oder eine in den kleinsten Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl mit geradem Zähler ist; und zwar ist dann V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$, je nachdem P $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist.

Ist aber μ für irgend ein System dieser Werthe, obschon sie $\delta V = 0$ oder $\delta V = \infty$ machen, eine ungerade ganze Zahl, oder eine gebrochene Zahl mit ungeradem Zähler, so ist V für diese Werthe der in ihr enthaltenen absolut Veränderlichen weder ein Maximum noch ein Minimum, in Bezug auf diese Nachbar-Werthe von V.

§. 8. Zusatz 2.

In den meisten Fällen, wird man finden, geht V_x nach ganzen Potenzen von x fort, auch für diejenigen besondern Werthe der absolut Veränderlichen, welche V in der angegebenen Beziehung zu einem Maximum oder Minimum machen. In diesen Fällen kann nie $\delta V = \infty$ werden, sondern bloß $\delta V = 0$ seyn. — In denselben Fällen, ist

auch μ allemal eine ganze Zahl und $P = \frac{\delta^{\mu} V}{\mu!}$, so daß dann die Entscheidung, ob V ein Maximum oder Minimum seyn wird, allemal von dem Variations-Coefficienten $\delta^{\mu} V$ abhängt, dergestalt, daß wenn μ gerade und $\delta^{\mu} V$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, dann allemal V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird.

Ist also $\delta^2 V$ nicht Null, für diese Werthe der absolut Veränderlichen, welche $\delta V = 0$ machen, sondern $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so ist V allemal für dieselben Werthe der absolut Veränderlichen ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$.

Dieser Fall wird wiederum am häufigsten vorkommen, weil $\delta^2 V = 0$ offenbar nur als ein Ausnahms-Fall zu betrachten ist. Sollte aber $\delta^2 V = 0$ werden, und nicht zugleich $\delta^3 V = 0$ oder $= \infty$, so ist V weder ein Maximum noch ein Minimum; wird aber auch noch $\delta^3 V = 0$, so wird $\delta^4 V$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ das $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ von V anzeigen; u. s. w. f.

Aber selbst unter den andern Fällen, wo, wenn V ein Maximum oder Minimum wird, der Zuwachs von V nach gebrochenen Potenzen von $\varkappa$ fortgeht, wird es eine unendlich größere Anzahl geben, wo das erste Glied $\varkappa^{\mu}.P$ der Entwicklung dieses Zuwachses nach steigenden Potenzen von $\varkappa$, noch immer eine ganze Zahl zum Exponenten haben wird, d. h. wo μ eine ganze Zahl seyn wird, und wo die gebrochenen Exponenten erst in den später folgenden Gliedern vorkommen werden. Auch in diesen Fällen kann nicht $\delta V = \infty$ sondern nur $\delta V = 0$ seyn (§. 6. Bem.), und die Entscheidung, ob für diese Werthe der absolut Veränderlichen, welche $\delta V = 0$ machen, wirklich ein Maximum oder Minimum statt finden werde

und welches von beiden, wird dann auch zunächst von $\delta^2 V$ abhängen, und wenn $\delta^2 V = \delta^3 V = 0$ ist, von $\delta^4 V$. u. s. w. f.

§. 9. Zusatz 3.

In den allermeisten Fällen wird also, um die Werthe der absolut Veränderlichen zu finden, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, es hinreichen, wenn bloß $\delta V = 0$ gesetzt und die Entscheidung, ob ein solches und welches von beiden wirklich statt finden werde, von $\delta^2 V$ abhängig gemacht wird, so daß man sich zunächst nur darum bekümmert, ob $\delta^2 V \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ ist, weil dann V selbst nothwendig ein $\begin{Bmatrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{Bmatrix}$ seyn muß.

Anmerkung 1. Nichts destoweniger muß man sich durch diese, wenn auch noch so gegründeten Betrachtungen nicht abhalten lassen, für jede einzelne Aufgabe noch in's besondere nachzusehen, ob nicht $\delta V = \infty$ auch noch Auflösungen liefere, weil es in der That unendlich viele Aufgaben giebt, wo, wenn man dies zu thun unterließe, vielleicht die einzig existirende Maxima oder Minima unbemerkt bleiben würden.

Anmerkung 2. Nachdem wir diese allgemeinen Lehren des Maximums und Minimums beendigt haben, werden wir in einzelnen Aufgaben, von den einfachsten zu den zusammengesetztesten stufenweise fortschreitend, die Anwendung derselben durchzuführen trachten, so wie auch für einzelne allgemeinere Fälle die Resultate als besondere, in den einzelnen Aufgaben mit Bequemlichkeit anzuwendende Lehrsätze, hinstellen.

§. 10. Aufgabe.

Die Werthe von y zu finden, welche $V = f(y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf diejenigen Nachbarwerthe $V_{,,}$, welche zu den nächst größern und nächst kleinern Werthen von y gehören; unter der Voraussetzung übrigens, daß f(y) eine ganz beliebige aber gegebene Funktion von y ist.

Auflösung. Hier ist:

1) $V = f(y)$; 2) $V_n = f(y_n)$;

und daraus nach (B. §. 5. oder B. §. 7.)

3) $\delta V = \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta y$ und 4) $\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cdot \delta y^2 + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta^2 y$.

Setzt man nun

I. $\delta V = 0$,

so giebt dies, da δy jeden Werth haben mag,

5) $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$.

Für diesen Werth von y, welcher $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ macht, wird die Gleichung (4.) geben

6) $\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cdot \delta y^2$;

und da in der Lehre vom Maximum und Minimum alle in Betrachtung kommende Werthe reel gedacht sind (weil sonst vom Größern und Kleinern nicht mehr die Rede seyn könnte), da also jeder Variations-Coefficient, mithin auch δy, nothwendig reell seyn muß, folglich δy^2 nothwendig positiv ist, so wird $\delta^2 V$ offenbar mit $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn (wenn nicht 0 und nicht ∞), und dann wird V nothwendig für den aus der Gleichung (5.) gefundenen Werth von y ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ seyn.

Im Falle derselbe aus $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ gezogene Werth von y auch $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ machte, würde man zu $\delta^3 V$, $\delta^4 V$, etc. etc. fortgehen, welche hier auf $\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}$, etc. zurückführen würden.

Sollte aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ die Form ∞ annehmen, für diesen aus $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ gefundenen Werth von y, so müßte man $y + \varkappa . \partial y$ (die höhern Potenzen von $\varkappa$ können hier wegbleiben, weil y ganz unabhängig gegeben, ihre nächst angrenzenden Werthe also durch $y + \varkappa . \partial y$, ja durch $y + \varkappa$ ($\partial y = 1$ gesetzt) hinlänglich ausgedrückt sind) statt y in V direkt substituiren, für y sogleich den gefundenen Werth setzend, diese Funktion $V_{y+\varkappa}$ direkt nach steigenden Potenzen von $\varkappa$ entwickeln, und überhaupt genau nach (§. 7.) verfahren, um in diesem Falle das Maximum vom Minimo zu unterscheiden, oder sich von der Nichtexistenz beider zu überzeugen.

Um endlich sicher zu seyn, keinen Werth vernachlässigt zu haben, für welchen V ein Maximum oder Minimum werden könnte, muß man noch

II. $\partial V = \infty$

d. h. den Nenner von $\partial V, = 0$ setzen (wenn ein solcher Nenner existirt). — Dies giebt nach (n. 3.), da ∂y willkührlich genommen werden kann, $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$, d. h. den Nenner von $\frac{\partial V}{\partial y}, = 0$; und für die hieraus sich findenden Werthe von y anzugeben, ob sie für V ein Maximum oder Minimum liefern, und welches von beiden, bleibt kein anderes Mittel, als das hier eben beschriebene (§. 7.), nehmlich $y + \varkappa . \partial y$ oder bloß $y + \varkappa$ statt y in V zu substituiren, dieses $V_{y+\varkappa}$ direkt nach steigenden Potenzen von $\varkappa$ zu entwickeln (man braucht aber von dieser Entwicklung allemal nur das erste Glied (nächst V), nehmlich $\varkappa^{\mu} . P$, so daß man sich um die folgenden Glieder nicht weiter bemüht) und nun zusieht, ob μ eine ganze gerade oder eine gebrochene Zahl (in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt) mit geradem

Zähler ist, wo dann V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, wenn P $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist.

Anmerkung. Da in dieser einfachsten Aufgabe y ganz unabhängig ist, die nächstangrenzenden Werthe von y also recht füglich bloß durch $y+\varkappa$ ausgedrückt seyn können, so werden die dazu gehörigen Werthe von V durch $V_{y+\varkappa}$ (E. §. 34.), wo $y+\varkappa$ ein Werth von y ist, dargestellt seyn, und dann geben sie nach dem Taylorschen Lehrsatze diese Reihe:

$$V_{y+\varkappa} = V + \varkappa . \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\varkappa^2}{2!} . \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\varkappa^3}{3!} . \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + \dots$$

und so sieht man noch direkter, die Schlüsse des (§. 6.) wiederholend, wie im Falle des Maximums oder Minimums

$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ oder $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$ seyn muß. In diesem einfachsten Falle reicht daher diese, in den Lehrbüchern der Differentialrechnung gewöhnlich anzutreffende Verfahrungsart recht füglich aus.

Beispiele. 1) $V = (\sqrt{ay-y^2})^3$,
2) $V = \sqrt{ay-y^2}$, 3) $V = (ay-y^2)^{\frac{2}{3}}$,
4) $V = (ay-y^2)^{\frac{4}{3}}$, 5) $V = (ay-y_2)^{\frac{4}{5}}$.

§. 11. Zusatz 1.

Ist $V = f(y)$ eine algebraische rationale (ganze oder gebrochene) Funktion, so kann keine der Ableitungen von V die Form ∞ annehmen, ohne daß V selbst diese Form annimmt. — Dann ist also bloß $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ zu setzen, und die Entscheidung, ob das Maximum oder das Minimum wirklich statt finde, einzig und allein von den höhern Ableitungen $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}$, etc. etc. dem (§. 8.) zu Folge zu entnehmen.

Unter den algebraischen Funktionen können es also nur die irrationalen seyn, für welche, wenn V eine solche ist, und ein Maximum oder Minimum werden soll, auch

$\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$ gesetzt werden müßte, um sicher zu seyn, keinen gewünschten Werth von y außer Acht gelassen zu haben; eben so nur diese, für welche, auch wenn $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ gesetzt worden ist, die nähere Entscheidung des Maximums und Minimums, von einer gebrochenen Potenz von x (als erstem Gliede der direkten Entwicklung des Zuwachses von V) abhängen kann.

Da überhaupt $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ allemal alle Werthe von y liefert, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, so oft V so ist, daß die Ableitungen von V keinen neuen Faktor im Nenner einführen, der nicht schon in V selbst enthalten wäre, so lassen sich auch bei den transcendenten Funktionen, aus dem bekannten Gesetze der Ableitungen meistens die Fälle leicht erkennen, in welchem $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ alle Maxima und Minima liefert, ohne daß man noch zu der andern Gleichung $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$ seine Zuflucht nehmen müßte. — Zu den letztern gehören namentlich alle aus y, Sin. y, Cos. y, Sin. $\varphi(y)$, Cos. $\psi(y)$, a^y, $a^{\pi(y)}$, log. $\varphi(y)$, etc. etc. etc. auf eine rationale Weise zusammengesetzte Funktionen, wenn $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $\pi(y)$, etc. selbst solche Funktionen vorstellen.

Endlich geben noch die irrational zusammengesetzten, wenn auch transcendenten Funktionen V in den meisten Fällen alle Maxima und Minima, wenn man bloß $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ setzt; doch darf dann, und in'sbesondere bei den durch Gleichungen verwickelt gegebenen, wenn auch algebraischen, Funktionen nicht unterlassen werden, jedesmal noch $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$ zu setzen, und die dadurch sich ergebenden Werthe von y besonders zu untersuchen.

Anmerkung. Ein Anfänger könnte versucht werden, die Werthe von y, welche eine irrational zusammengesetzte Funktion $f(y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, auch dadurch zu finden, daß man diese irrationale Funktion $V = f(y)$ in eine gleiche rational zusammengesetzte Funktion $V = \varphi(z)$ von z verwandelte, zwischen y und z die dazu schickliche Relation $\pi(y, z) = 0$ annehmend; und nun die Werthe von z suchte, welche $\varphi(z)$ zu einem Maximum oder Minimum machen. — Deshalb mag es nicht überflüssig seyn zu bemerken, daß, weil $f(y)$ ein Maximum oder Minimum werden soll, in Bezug auf die, zu den nächst größern und nächst kleinern durch $y + x . \partial y$ hinlänglich ausgedrückten Werthen von y, gehörigen Werthe von V, der Werth von $V = \varphi(z)$ ein Maximum oder Minimum werden muß, nicht in Bezug auf die zu den nächst größern und nächst kleinern Werthen von z gehörigen Werthe von V oder $\varphi(z)$, sondern in Bezug auf diejenigen Werthe von z, welche zu den nächst größern und nächst kleinern Werthen von y gehören. — Wenn also y in y_{u} und dadurch, und mittelst der Gleichung $\pi(y, z) = 0$, auch z in z_{u} d. h. in $z + x . \partial z + \frac{x^2}{2!} . \partial^2 z + \text{etc. etc.}$ übergeht, so sind doch nur ∂y, $\partial^2 y$, etc. willkührlich zu nehmen, und ∂z, $\partial^2 z$, etc. dagegen von diesen ∂y, $\partial^2 y$, etc. etc. abhängig. Wenn ferner dadurch, daß y in y_{u} und deshalb z in z_{u} übergegangen ist, auch V in V_{u}

$$= V + x . \partial V + \frac{x^2}{2!} . \partial^2 V + \text{etc.}$$

übergeht, und im Falle des Maximums oder Minimums

$\partial V = 0$ oder $\partial V = \infty$ genommen werden muß; wenn zugleich $\partial V = \frac{\partial V}{\partial z} . \partial z$ wird, also im Falle des Maximums oder Minimums $\frac{\partial V}{\partial z} . \partial z = 0$ oder $= \infty$; so darf man doch nicht übersehen, daß diese Gleichungen nicht für jedes ∂z, sondern nur für das zu dem y_{u} aus $\pi(y, z) = 0$ sich ergebende ∂z (es ist nehmlich $\frac{\partial \pi}{\partial y} . \partial y + \frac{\partial \pi}{\partial z} . \partial z = 0$, also $\partial z = -\frac{\partial \pi}{\partial y} . \partial y : \frac{\partial \pi}{\partial z}$) gelten, also nicht in $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$, oder $= \infty$, sondern in $-\left(\frac{\partial V}{\partial z} . \frac{\partial \pi}{\partial y}\right) : \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0$, oder $= \infty$, übergehen. Dies ist aber dieselbe Gleichung die aus $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ hervorgeht,

weil $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ ist und $\frac{\partial z}{\partial y}$ bestimmt wird aus $\frac{\partial . \pi(y, z)}{\partial y} = 0$

d. h. aus $\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial \pi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. —

Diese Bemerkung mag hier einen um so größern Werth haben, da wir in der Folge in zusammengesetztern Fällen noch oft Gelegenheit haben werden, auf den Unterschied aufmerksam machen zu müssen, der bei einer Gleichung existirt, wenn sie für jedes ganz unabhängige δz, oder wenn sie nur für diejenigen δz statt findet, die noch von andern Variationen auf irgend eine Weise abhängig sind.

In dem hiesigen Falle ist übrigens klar, daß wenn man darthun kann, daß δz nicht 0 und auch nicht ∞ wird, unabhängig von δy, dann

die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial z} . \delta z = 0$ oder $= \infty$

allemal auf $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ oder $= \infty$ sich reducirt. —

So wie aber δz nicht Null und auch nicht ∞ wird, so ist dann auch

der Zuwachs von z nehmlich $\varkappa . \delta z + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 z +$ etc. etc., in so ferne

sein Zeichen für ein im Moment des Verschwindens gedachtes $\varkappa$, von dem Zeichen seines ersten Gliedes $\varkappa . \delta z$ abhängt, ein solcher, der mit $\varkappa$ zugleich das Zeichen ändert. Dann sind also die zu den nächst größern und nächst kleinern Werthen von y gehörigen Werthe von z, zu gleicher Zeit dem z selbst dergestalt nächstangrenzende Werthe, daß der eine größer, der andere aber kleiner ist, als der Werth z selbst.

Es ließen sich hieran noch eine Menge anderer Untersuchungen knüpfen, die wohl in die Augen fallen, die aber hier nicht behandelt werden können, in so ferne wir uns nicht in so ausführliches Detail einlassen wollen.

§. 12. Zusatz 2.

Ist $V = f(y)$ eine irrationale oder transcendente Funktion von y, so kann sie für jeden Werth von y, mehre reelle Werthe zugleich haben. Indem man in einer solchen Funktion $f(y)$ dem y nach und nach stetig größer und stetig kleiner werdende Werthe beilegt, werden die zugehörigen ebenfalls stetig neben einander liegenden Werthe von V oder $f(y)$ mehre Reihen (Zweige) bilden, und der eine dieser Zweige kann dann für einen gewissen Werth von y ein Maximum

oder ein Minimum haben, für welchen der andere Zweig keines hat. —

Im Falle dieser, von Euler sehr passend mehrförmig (vielförmig) genannten Funktionen, muß man daher jeden solchen verschiedenen Zweig als für sich stehend betrachten, und für ihn, ohne Rücksicht auf die übrigen Zweige, die Werthe von y für das Maximum oder Minimum von V finden.

Um aber solches mit Leichtigkeit bewerkstelligen und jede solche Untersuchung gehörig vollständig durchführen zu können, ist es bequem, diese verschiedenen Zweige der Funktionen durch eine systematische in allen Fällen ausreichende zweckmäßige und einfache Bezeichnung abzusondern, und die zum Operiren nöthigen Lehrsätze für diese einzelnen besondern Formen bestimmter auszusprechen, wie in dem („Lehrbuch der Arithm. Algebra und Analys. Berlin 1822. Th. II. Kap. XXVII.") der Anfang dazu gemacht worden ist. (Vergl. Beispiele hinter §. 10.).

§. 13. Zusatz 3.

Ist die Funktion V von y, welche ein Maximum oder Minimum werden soll, nicht entwickelt sondern verwickelt durch die Gleichung $\psi(V, y)=0$ gegeben, so hat man zur Bestimmung von $\frac{\partial V}{\partial y}$, außer

1) $\psi(V, y)=0$, auch noch $\frac{\partial \cdot \psi}{\partial y}=0$ d. h.

2) $\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=0$,

woraus sich $\frac{\partial V}{\partial y}$ ergiebt, während man durch nochmaliges differentiiren auch die Gleichung $\frac{\partial^2 \cdot \psi}{\partial y^2}=0$ d. h.

3) $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial y.\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$

zur Bestimmung von $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ in y, erhält.

Wird nun

I. $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ gesetzt, so reducirt dies die Gleichung (2.) sogleich auf

4) $\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$ so daß im Allgemeinen $\psi=0$ und $\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$ *) durch Elimination von V die Werthe für y geben werden, welche $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ machen. **)

So wie aber $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ ist, so reducirt sich die Gleichung (3.) auf

5) $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}:\frac{\partial\psi}{\partial V},$

welche für die bereits gefundenen Werthe von y und V, sogleich auch den Werth der zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ liefern wird.

---

*) Man erhält aber $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ wenn man ψ nach y differentiirt, dabei aber V, so oft es auch vorkommt, als nach y constant ansieht.

**) Wir sagen hier absichtlich „im Allgemeinen". Aus der Gleichung (2.) und (4.), folgt nehmlich nothwendig $\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=0$ aber nur dann nothwendig $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, wenn $\frac{\partial\psi}{\partial V}$ für dieselben Werthe von y und V nicht Null wird. — In einzelnen Fällen wird man auf diesen Umstand Rücksicht nehmen müssen, namentlich dann, wenn die Differentialgleichung (2.) einen von $\frac{\partial V}{\partial y}$ unabhängigen Faktor haben sollte.

Man wird also ψ zweimal hintereinander nach y differentiiren und V als constant ansehn, dann dasselbe ψ einmal nach V, und dabei y als constant betrachten, ersteres durch letzteres dividiren, und dem Ganzen das (—) Zeichen vorsetzen, um im Falle $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ ist, das zugehörige $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ zu erhalten. — Ist solches $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ dann $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$, so ist V ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{Bmatrix}$, für diesen Werth von y.

Soll endlich

$$\text{II.}\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\infty$$ gesetzt werden, so hat man

$$6)\quad \frac{\partial\psi}{\partial V}:\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

welche in Verbindung mit $\psi(V, y)=0$ die Werthe für y liefert, welche $\frac{\partial V}{\partial y}=\infty$ machen.

Um aber hier zu untersuchen, ob die so gefundenen Werthe von y, für welche $\frac{\partial V}{\partial y}=\infty$ ist, wirklich V zu einem Maximum oder zu einem Minimum machen, und welches von beiden statt habe, setze man, wenn α und β solche für y und V gefundene Werthe sind, $\alpha+\varkappa$ statt y und $\beta+h$ statt V, und suche h nach steigenden Potenzen von $\varkappa$ zu entwickeln, und wenigstens das erste Glied $\varkappa^{\mu}.P$ dieser Entwicklung zu erhalten, weil solches für unsern Zweck ausreicht. — Bei algebraischen Gleichungen wird man sich dabei am sichersten der Lagrange'schen Methode bedienen, welche in La croix Traité du Calcul diff. et du Calcul int. T. I. Chap. II. sich beschrieben findet.

Beispiel. Sey 1) $V^3-2yV-y^2=0$, 2) $\text{Cos.}(V-y)-2.\text{Sin.}V-\text{Cos.}y=0$.

§. 14. Zusatz 4.

Es ist bekanntlich, wenn

$$f(\alpha) > f(\beta),$$

auch $f(\alpha) \pm A > f(\beta) \pm A$;

ferner noch $m . f(\alpha) \gtrless m . f(\beta)$, je nachdem $m \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ ist;

zuletzt $[f(\alpha)]^m \gtrless [f(\beta)]^m$,

wo das Zeichen $>$ oder $<$ abhängt, theils ob $f(\alpha)$ oder $f(\beta)$ positiv oder negativ, theils auch, ob m eine ganze und gerade oder ungerade, oder auch eine in den kleinsten Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl mit geradem oder ungeradem Zähler oder Nenner ist; welches alles in jedem besondern Falle mit Zuziehung der dazu nöthigen Sätze des „Lehrbuchs der A., Alg., u. Analys. T. I. Kap. VIII." leicht entschieden werden kann.

Sollen also die Werthe von y gesucht werden, welche $V = f(y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, so kann man erstlich alle constanten Glieder dieses Ausdrucks V weglassen, dann auch alle positiven und constanten Faktoren (oder Divisoren); und die Werthe von y, welche die so entstehende neue einfachere Funktion zu einem Maximum oder Minimum machen, bewirken dasselbe auch für V oder $f(y)$ selbst. Läßt man dagegen einen Exponenten weg, mit welchem V afficirt ist, z. B. wenn $V = f(y) = [\psi(y)]^m$ wäre, und man statt $f(y)$ bloß ψy zu einem Maximum oder Minimum machen wollte, so kann während $\psi(y)$ ein Maximum ist, das $f(y)$ vielleicht auch ein Maximum, vielleicht aber auch ein Minimum seyn, vielleicht keines von beiden (in so ferne $[\psi(y)]^m$ für einen der nächstangrenzenden Werthe von y imaginär werden kann, während $\psi(y)$ nicht imaginär ist.) Will man also hier durch Weglassen des Exponenten m Vortheil ziehen, so muß man auf die angeführten Lehrsätze besonders Acht haben.

§. 15. Zusatz 5.

So oft der Werth von y gesucht wird, welcher $V=f(y)$ zu einem Maximum oder Minimum macht, so setzt die Entscheidung, ob das eine oder das andere statt finde, allemal voraus, daß in $f(y)$ außer y kein unbestimmter Ausdruck mehr vorkomme, weil man nur bei besondern bereits in Ziffern dargestellten Zahlen das Größere und das Kleinere unterscheiden kann. Im entgegengesetzten Falle, wenn z. B. in $f(y)$ noch b, x, a, etc. vorkommen, wird man bloß die Bedingungen angeben können, welche von den für b, x, a, etc. zu setzenden besondern Werthen erfüllt seyn müssen, wenn ein Maximum oder ein Minimum, und ein bestimmtes von beiden statt haben soll.

Kommt namentlich in V oder $f(y)$ auch noch x vor, so daß man dieselbe Funktion V auch durch $f(x, y)$ bezeichnen könnte, so wird sich, man mag $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ oder $=\infty$ setzen, allemal nur y in x bestimmen lassen, und dann wird das erste Glied $\varkappa^{\mu}.\delta y^{\mu}.P$ in der Entwicklung des Zuwachses $f(x, y+\varkappa.\delta y) - f(x, y)$ im Allgemeinen ebenfalls in x ausgedrückt seyn, so daß für gewisse stetig auf einander folgende Werthe von x, dieses P fortwährend positiv, also unter der Voraussetzung daß μ gerade ist, die Funktion V allemal ein Minimum, dagegen für eine andere Reihe stetig auf einander folgender Werthe von $\varkappa$, dieses P jedesmal negativ, und daher V für alle diese Werthe von x, ein Maximum werden kann (in Bezug auf die durch $f(x, y+\varkappa.\delta y)$ vorgestellten Nachbar-Werthe von V).

Deshalb kann man sogleich folgende neue Frage aufwerfen: Wenn y diejenige Funktion von x ist, welche, während $V=f(x, y)$ ist, die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ oder $=\infty$ macht, und für welche μ eine gerade ganze Zahl oder eine (in den kleinsten Zahlen ausgedrückte) gebrochene Zahl mit

geradem Zähler wird; unter allen den stetig auf einander folgenden Werthen von x, welche P als Funktion von x, jedesmal positiv, also V oder $f(x, y,)$ in Bezug auf die durch $f(x, y + \varkappa . \partial y)$ ausgedrückten Nachbar-Werthe von V zu einem Minimum machen, denjenigen Werth von x zu finden, für welche dieselbe Funktion V oder $f(x, y)$ als bloße Funktion von x, in Bezug auf die durch $f(x + \varkappa . \partial x, y_{x + \varkappa . \partial x})$, *) wo $x + \varkappa . \partial x$ ein Werth von x (E. §. 34.), ausgedrückten Nachbar-Werthe, entweder abermals ein Minimum oder auch ein Maximum wird; und umgekehrt, wenn V in Bezug auf die durch $f(x, y + \varkappa . \partial y)$ dargestellten Werthe von V ein Maximum ist, für eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe von x, unter diesen Werthen von x diejenigen zu finden, welche V oder $f(x, y)$ in Bezug auf die Nachbar-Werthe $f(x + \varkappa . \partial x, y_{x + \varkappa . \partial x})$ entweder ebenfalls zu einem Maximum, oder zu einem Minimum machen.

Weil aber in dieser neuen Aufgabe $f(x, y)$ bereits eine bloße Funktion von x seyn soll, so ist sie dieselbe des (§. 10.) und $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ oder $= \infty$ d. h. $\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ oder $= \infty$ giebt diese gesuchten Werthe von x. Dabei ist nur der Umstand zu beachten, daß wenn man nach (§. 10.) die Werthe von x gefunden hat, welche V oder $f(x, y)$ in Bezug auf die Nachbar-Werthe $f(x + \varkappa . \partial x, y_{x + \varkappa . \partial x})$ zu einem $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ machen, man für jeden dieser Werthe von x erst nachsehen muß, ob er sich auch wirklich unter derjenigen stetig fortlaufenden Reihe der Werthe von x befinde, für welche das V in der ersten Beziehung das Minimum (oder Maximum) seyn muß.

---

*) Durchgehends ist $\varkappa$ bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens gedacht. Solches wird daher immer stillschweigend vorausgesetzt, und nicht mehr besonders erwähnt.

Wegen mancher interessanten Bemerkungen, die sich hier anknüpfen lassen, wollen wir diese Aufgabe noch im nähern Detail betrachten.

Es sey nehmlich die Funktion y von x, welche $V = f(x, y)$ in Beziehung auf die Nachbar-Werthe von V, die durch $f(x, y + \varkappa . \delta y)$ ausgedrückt sind, zu einem Maximum oder Minimum machen sollen, mittelst der Gleichung

$$1) \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

gefunden, so ist das $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ vorhanden, für alle diejenigen Werthe von x, welche $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ als Funktion von x (in so ferne statt y der aus der Gleichung (1.) gezogene Werth in x, gesetzt worden) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ machen. — Während y nun diese aus der Gleichung (1.) gezogene Funktion von x vorstellt, also $V = f(x, y)$ das x theils explicit, theils implicit enthält, seyen die Werthe von x, welche V in Beziehung auf die Nachbar-Werthe $f(x + \varkappa . \delta x, y_{x + \varkappa . \delta x})$ zu einem Maximum oder Minimum machen, gefunden durch die Gleichung

$$2) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

welche vermöge der Gleichung (1.) in

$$3) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

übergeht.

Und die hieraus sich ergebende Werthe von x, werden V in der letztgedachten Beziehung zu einem $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ machen, je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ wird.

Nun ist aber wegen der Gleichung (1.)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

also

$$4)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial \cdot \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x},$$

wo y gegeben ist durch die Gleichung (1.), also $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch die Differential-Gleichung der (1.), d. h. durch $\frac{\partial \cdot \frac{\partial V}{\partial y}}{\partial x} = 0$, oder

$$5)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Findet man hieraus $\frac{\partial y}{\partial x}$ und substituirt diesen Werth in die (4.), so ergiebt sich

$$6)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}.$$

Ist nun $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ positiv, so ist V in der erstgedachten Beziehung ein Minimum, und in der letztgedachten Beziehung ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$, je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ d. h. je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \gtrless \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2$ ist. — Ist dagegen $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ negativ, so ist V in der ersten Beziehung ein Maximum, und in der letzten Beziehung ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$, je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, d. h. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \lessgtr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2$ ist.

Anmerkung. Man kann auch die Werthe von x suchen, welche V oder f(x, y) zu einem $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ machen, in Bezug auf die durch $f(x+\varkappa.\partial x, y)$ ausgedrückten Werthe, wenn auch y selbst als eine Funktion von x bereits gefunden worden ist, welche V oder f(x, y) in Bezug auf die Nachbar-Werthe $f(x, y+\varkappa.\partial y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, für eine Reihe stetig aufeinander folgender Werthe von

x. — Es ist dann y als einen bestimmten constanten Werth habend gedacht, der selbst noch unbekannt aber jedesmal durch den in der letzten Aufgabe gefundenen Werth von x bestimmt ist. Die Funktion V ist dann ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ in Bezug auf die durch $f(x+\varkappa . \partial x, y)$ für dieses bestimmt und constant gedachte y, ausgedrückten Nachbar-Werthe von V. — Weil hier y, wenn auch zuerst als Funktion von x gefunden, doch in dieser letztern Aufgabe ausdrücklich als einen unveränderlichen Werth habend gedacht werden soll, so wird V dann bloß als eine Funktion von x betrachtet, in so ferne sie das x explicit enthält, und $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ oder $=\infty$ giebt dann die hier gedachten Werthe von x.

Berücksichtigt man weder $\frac{\partial V}{\partial y}=\infty$, noch $\frac{\partial V}{\partial x}=\infty$, so hat man hier wieder zur Bestimmung von x, die beiden Gleichungen

$$1)\ \frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{\partial V}{\partial x}=0,$$

wie in dem vorstehenden (§. 15.) — Allein das Maximum wird vom Minimo hier nicht durch $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, sondern nur durch $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ entschieden, so daß, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ positiv und $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist, dann V in der ersten Beziehung ein Minimum, in der letztern dagegen ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird. Und ist $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ negativ, und $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$, so ist V in der ersten Beziehung ein Maximum, in der zweiten dagegen ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$.

Es werden also aus denselben Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, Werthe für x und y hervorgehen können, welche den Bedingungen der hier ausgesprochenen Aufgabe entsprechen, ohne der Aufgabe des vorstehenden Zusatzes (§. 15.) zu genügen. (Vergl. sorgfältig §. 1. Anmerk. 2. in so ferne die dortige Aufgabe gerade hieher gehört).

§. 16. Aufgabe.

Man soll die Werthe für x und für y suchen, welche eine Funktion $V=f(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche zu beliebig und von einander ganz unabhän-

gig gedachten nächst größern und nächst kleinern Werthen von x und von y gehören; also in Bezug auf alle diejenigen Werthe von V, welche durch $V_{\varkappa}=f(x_{\varkappa}, y_{\varkappa})$ ausgedrückt sind (immer $\varkappa$ bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens gedacht).

Auflösung. Man hat hier

$$1)\quad V=f(x, y) \qquad 2)\quad V_{\varkappa}=f(x_{\varkappa}, y_{\varkappa})$$

und nach (B. §. 5. oder B. §. 8.):

$$3)\quad \delta V=\frac{\partial V}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y \quad \text{und}$$

$$4)\quad \delta^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\delta x^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\delta x.\delta y+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2+\frac{\partial V}{\partial x}.\delta^2 x + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y.$$

Setzt man also nach (§. §. 6. 7.)

I. $\delta V=0$, so erhält man

$$5)\quad \frac{\partial V}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y=0,$$

welche unabhängig von jedem Werth von δx und δy statt finden soll, weshalb sie in

$$6)\quad \frac{\partial V}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad 7)\quad \frac{\partial V}{\partial y}=0$$

zerfällt, welche letzteren Gleichungen zur Bestimmung derjenigen Werthe von x und y dienen werden, für welche $\delta V=0$ ist.

Vermöge der Gleichungen (6. und 7.) reducirt sich aber die Gleichung (4.) auf

$$8)\quad \delta^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\delta x^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\delta x.\delta y+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2$$

und dieser Ausdruck ist nach (E. §. §. 3. 4.) für jeden reellen Werth von δx und δy allemal, aber auch nur dann $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn

9) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2$ und zugleich

10) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ (oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, welche Bedingungen, wenn sie erfüllt sind, anzeigen, daß V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ geworden, in Bezug auf die Nachbar-Werthe von V, die durch $V_{,,} = f(x_{,,}, y_{,,})$ für jedes beliebige δx und δy ausgedrückt sind.

Setzt man nachgehends noch

II. $\delta V = \infty$, so erhält man

11) $\frac{\partial V}{\partial x} . \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y = \infty$,

wo man also $\frac{\partial V}{\partial x} = \infty$ oder $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$ annehmen kann. Es bleibt aber hier die Frage zu beantworten; wenn z. B. $\frac{\partial V}{\partial x} = \infty$ genommen ist, welchen Werth wird dann $\frac{\partial V}{\partial y}$ haben müssen? —

Bemerkt man jedoch, daß im Falle V ein Maximum oder Minimum seyn soll, in Bezug auf die angegebenen Nachbar-Werthe, allemal $\delta V = 0$ oder $= \infty$ seyn muß für jeden Werth von δx und δy, also auch für $\delta x = 0$, wo sich δV auf $\frac{\partial V}{\partial y} . \delta y$ reducirt; so folgt, daß auch $\frac{\partial V}{\partial y}$ keinen andern Werth haben kann, als Null oder ∞. — Man wird also verbinden müssen

12) $\frac{\partial V}{\partial x} = \infty$ mit $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$

und 13) $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ mit $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$

und 14) $\frac{\partial V}{\partial x} = \infty$ mit $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$,

und jedes System von Werthen, welche man aus den Glei-

chungen (12.) oder (13.) oder (14.) erhält, kann ein Maximum oder Minimum liefern.

Ob aber für ein so gefundenes bestimmtes System von Werthen von x und y, die Funktion V wirklich, in der angegebenen Beziehung, ein Maximum oder Minimum werde, und welches von beiden, muß dann nach (§. 7.) durch direkte Entwicklung von $f(x_{,,}, y_{,,})$ (wofür man hier auch bloß $f(x+\varkappa.\partial x, y+\varkappa.\partial y)$ setzen kann) nach steigenden Potenzen von $\varkappa$, entschieden werden.

Beispiele. 1) $V=\frac{y-x^2}{y-x}+\left(\sqrt[3]{y+x-4}\right)^2$;

2) $V=\frac{y-x-x^2}{y-2x}+\left(\sqrt[3]{y-4}\right)^2$;

3) $V=mxy+\frac{2a^3n}{y}+\frac{2a^3n\sqrt{x^2+4y^2}}{xy}$;

4) $V=(a-2x)(a-2y)(2x+2y-a)$;

5) $V=\frac{y-2x^2}{x-y^2}+\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^2$.

Anmerkung 1. Vergleicht man diese Resultate mit denen des (§. 15.), so findet man, daß V in Bezug auf die Nachbar-Werthe von V, die durch $f(x_{,,}, y_{,,})$ ausgedrückt sind, für jedes mögliche ∂x, ∂y, etc., genau in denselben Fällen ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{Bmatrix}$ ist, in welchen erstlich V in Bezug auf die Nachbar-Werthe $f(x, y+\varkappa.\partial y)$ ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{Bmatrix}$ und zu gleicher Zeit das gleichartige $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{Bmatrix}$ ist, in Bezug auf die durch $f(x+\varkappa.\partial x, y_{x+\varkappa.\partial x})$ vorgestellten Nachbar-Werthe von V, wo y als die der erstern Bedingung entsprechende Funktion von x angesehen wird. — Der nächstfolgende (§. 17.) wird die Uebereinstimmung dieser Resultate näher motiviren.

Anmerkung 2. Ferner mag bemerkt werden, daß in der vorstehenden Auflösung ∂x und ∂y, eben so wie x und y, als constante und völlig unabhängige Ausdrücke zu nehmen sind, und daß, eben des letztern Umstands wegen, recht gut

$$\partial^2 x=\partial^2 y=\partial^3 x=\partial^3 y=\text{etc.}=0$$

gesetzt werden kann.

§. 17. Zusatz 1.

Wollte man aber die Aufgabe des (§. 16.) aus dem Gesichtspunkte betrachten, daß man nur x als constant, y aber als diejenige Funktion von x ansieht, welche für den eben gedachten constanten Werth von x, denjenigen Werth von y liefert, für welchen V in Beziehung auf die Nachbar-Werthe $f(x_\varkappa, y_\varkappa)$ ein Maximum oder Minimum werden soll, so müßte man der größern Allgemeinheit wegen, auch $\delta y, \delta^2 y$, etc. als Funktionen von x sich denken, übrigens y als Funktion von x durch $\varkappa$ variiren, und entweder x, in so ferne es bloß explicit in V enthalten ist, oder auch alles explicit und implicit in V vorkommende x, in $x_\varkappa$ übergehen lassen. Beides führt zu den im (§. 16.) verlangten Nachbar-Werthen von V, weil in jedem Falle die nächstangrenzenden Werthe von x und y von einander ganz unabhängig bleiben. —

Die erstere Annahme giebt ganz genau die Entwicklung des (§. 16.) selbst wieder, nur y, δy, etc. als Funktionen von x betrachtet, welches hier nichts ändert.

In der zweiten Annahme dagegen bildete man zuerst

$$V_\varkappa = f(x, y_\varkappa), \quad \text{wo} \quad y_\varkappa = y + \varkappa . \delta_1 y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta_1^2 y + \ldots.$$

seyn mag, während $\delta_1 y, \delta_1^2 y$, etc., so wie y selbst als Funktionen von x gedacht werden, so daß $y_\varkappa$ die dem y nächstangränzenden Funktionen von x vorstellt. Dann müßte man noch, die Bezeichnung (B. §. 26.) beibehaltend

$$V_{(\varkappa)} = f(x_\varkappa, y_{(\varkappa)})$$

nehmen, um in $V_{(\varkappa)}$ alle möglichen Nachbar-Werthe ausgedrückt zu haben, in Bezug auf welche V selbst, der Aufgabe des (§. 16.) gemäß, ein Maximum oder Minimum werden soll. Läßt man aber die Bezeichnung (B. §. 26.) hier statt finden, so hat man weiter:

$$1) \quad \delta V = \delta_1 V + \partial V . \delta x$$

$$2) \quad \delta^2 V = \delta_1^2 V + 2\partial(\delta_1 V) . \delta x + \partial^2 V . \delta x^2 + \partial V . \delta^2 x$$

wo sich die bloßen ∂ auf alles x beziehen; und dabei (nach B. §. 5. oder B. §. 7.):

$$3)\ \delta_1 V = \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta_1 y$$

$$4)\ \delta_1^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cdot \delta_1 y^2 + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta_1^2 y.$$

Verfährt man nun nach (§. 6.), übergeht den Ausnahmsfall $\delta V = \infty$ und setzt bloß, für das Maximum oder Minimum

$$\delta V = 0,$$

so giebt dies

$$5)\ \delta_1 V + \partial V \cdot \delta x = 0, \qquad \text{unabhängig von } \delta x,$$

also $6)\ \delta_1 V = 0$ und $7)\ \partial V = 0;$

oder $8)\ \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta_1 y = 0$ und $9)\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$

für jedes $\delta_1 y$, also

$$10)\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \text{und} \qquad 11)\ \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Die erstere Gleichung (10.), welche **zuerst** existirt, und vermöge welcher erst die Gleichung (9.) auf die einfachere (11.) zurückgebracht wird, bestimmt y als Funktion von x; die andere (11.) dagegen den Werth von x.

Um nun das Maximum vom Minimo zu unterscheiden, muß man zu $\delta^2 V$ fortgehen, und zusehen, ob solches unabhängig von $\delta_1 y$ und von δx beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist. — Da aber $\delta_1 V$ als Funktion von x identisch Null ist, so ist auch $\partial(\delta_1 V) = 0$; dagegen ist $\partial V = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}$, weil y diejenige Funktion von x ist, welche $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ macht. Obgleich nehmlich auch $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ ist (11.), so ist doch nicht $\frac{\partial V}{\partial x}$ als Funktion von x (wie oben $\delta_1 V$) identisch 0, son-

dern nur in so ferne man für x den bestimmten Werth gesetzt denkt, der $\frac{\partial V}{\partial x}$ als Funktion von x, die an sich identisch nicht Null ist, gerade zu Null macht. Wenn also aus $\delta_1 V = 0$ auch

12) $\partial(\delta_1 V) = 0$ hervorgieng, so geht doch nicht aus $\partial V = 0$ auch $\partial . \partial V$ oder $\partial^2 V = 0$ hervor, sondern man hat

13) $\partial^2 V = \partial . (\partial V) = \partial\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} . \frac{\partial y}{\partial x}$,

wo y die Funktion von x ist, die aus $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ hervorgeht, also $\frac{\partial y}{\partial x}$ diejenige Funktion von x, welche aus $\partial . \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ d. h. aus

14) $\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \frac{\partial y}{\partial x} = 0$

sich ergiebt, so daß, wenn man aus (13. und 14.) dieses $\frac{\partial y}{\partial x}$ eliminirt,

15) $\partial^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2 : \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ sich findet.

Dabei ist aus (2.), in Verbindung mit (6. 7. 12. 10. und 4.):

16) $\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta_1 y^2 + \partial^2 V . \delta x^2$

und dieses ist offenbar allemal, aber auch nur dann allemal (unabhängig von $\delta_1 y$ und δx) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\partial^2 V$ (n. 15.) zu gleicher Zeit $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind (in so ferne δx und $\delta_1 y$ nothwendig reell seyn müssen). — Dies führt also zu demselben Resultat, welches auch (§. 16.) bereits erhalten worden ist; und man sieht nun um so deutlicher, warum man im (§. 15.), wo dieselbe Aufgabe auf eine ähnliche

Weise wie hier, gefaßt ist, sobald man **gleichartige** Maxima oder Minima verlangte, zu demselben Resultat geführt werden mußte.

Anmerkung. In dieser Aufgabe reicht es hin, $\delta^2 x$, $\delta^3 x$, etc. gleich vom Anfange an $=0$ zu setzen; eben so $\delta_1^2 y$, $\delta_1^3 y$, etc. etc.; aber nicht $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. (die Bezeichnung des (B. §. 26.) beibehaltend), als welche nicht Null seyn können.

§. 18. Zusatz 2.

Sowohl von dem im (§. 15.) als auch von dem im (§. 17.) angenommenen Gesichtspunkte sehr verschieden, ist der folgende, unter welchem die Aufgabe ebenfalls noch betrachtet werden kann. — So oft nehmlich x und y von einander ganz unabhängig sind, so oft kann man auch y als eine Funktion von x ansehen, die aber **jede mögliche Form haben soll**, d. h. die der Form nach völlig willkührlich gedacht wird. Indem man sich nun x in $x_{,,}$, oder was hier hinreicht in $x+\varkappa.\delta x$ übergehend denkt, geht y als Funktion von x in $y_{,,}$ über, und V in $V_{,,}$; und da (B. §. 5. oder §. 7.) $\delta y=\frac{\partial y}{\partial x}.\delta x$ ist, so ist δy **wegen der völligen Willkührlichkeit des** $\frac{\partial y}{\partial x}$, von δx dem Werthe nach ganz unabhängig, so daß, während $x+\varkappa.\delta x$ ganz beliebige nächstangrenzende Werthe von x vorstellt, unser $y_{,,}$ oder

$$y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+\frac{\varkappa^3}{3!}.\delta^3 y+\text{etc. etc.}$$

ebenfalls ganz beliebige, mit den vorgenannten in gar keinem Zusammenhange stehende dem y nächstangrenzende Werthe ausdrückt, wie solches unsere Aufgabe (§. 15.) verlangt, wenn $V_{,,}$ hier die Werthe vorstellen kann, in Bezug auf welche V ein **Maximum** oder **Minimum** werden soll.

Hier ist nun nach (B. §. 5. oder §. 7.):

1) $\delta V=\partial V.\delta x$ und 2) $\delta^2 V=\partial^2 V.\delta x^2$,

letzteres wegen $\delta^2 x = 0$; und indem sich das bloße ∂ auf alles x bezieht, auch auf das in y enthaltene. — Setzt man daher für das Maximum und Minimum nach (§. 6.), den Ausnahmsfall wo $\delta V = \infty$ ist, übergehend,

$$\delta V = 0 \quad \text{oder} \quad \partial V . \delta x = 0,$$

so giebt dies, weil δx ganz willkührlich ist:

$$1)\ \partial V = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Weil aber y, also auch $\frac{\partial y}{\partial x}$ ganz willkührliche Funktionen von x sind, so zerfällt die Gleichung (1.) nach (E. §. 85.) in

$$2)\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad 3)\ \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Um nun das Maximum von dem Minimo zu unterscheiden, muß man $\delta^2 V$ oder $\partial^2 V . \delta x^2$ nehmen, und da δx^2 immer positiv ist, so wird nach (§. 7.) V ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ seyn, wenn $\partial^2 V \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist. Nun ist aber

$$\partial^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial y} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

oder wegen $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$,

$$4)\ \partial^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

ein Ausdruck der beständig positiv seyn muß oder beständig negativ, welche beliebige Funktion von x man auch statt y setzen mag (wenn sie nur, sobald für x der aus den Gleichungen (2. und 3.) gezogene Werth gesetzt wird, für y den aus denselben Gleichungen sich ergebenden liefern), so daß dieses $\partial^2 V$ für jeden reellen Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ beständig

$\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ werden muß, wenn V ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ werden soll. Dies ist aber der Fall nach (E. §. §. 3. 4.), wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}\right)^2$ und zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist, für diejenigen Werthe von x und von y, welche sich aus den Gleichungen (2. und 3.) ergeben.

Also findet sich hier das (§. 15.) bereits erhaltene Resultat unverändert wieder.

§. 19. Zusatz 3.

Ist in der Aufgabe (§. 16.) das V nicht entwickelt sondern verwickelt mittelst der Gleichung

$$1) \quad \psi(V, x, y) = 0$$

gegeben, so muß man, um $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ zu erhalten, diese Gleichung (1.) nach x und nach y differentiiren und hat dann:

$$2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad 3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Soll nun, wie die Auflösung (§. 16.) im allgemeinen Falle verlangt, $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ werden, so reducirt dies die Gleichungen (2. und 3.) auf

$$4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{und} \qquad 5) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

die also mit (1.) durch Elimination von V verbunden, diejenigen Werthe für x und y liefern, welche $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ machen.

Um nachher das Maximum von dem Minimo unterscheiden zu können, nach dem in der Auflösung (§. 16.) gefundenen Resultat, muß man $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ bestimmen, welche sich aus

5) $\frac{\partial^2 . \psi}{\partial x^2} = 0$, 6) $\frac{\partial^2 . \psi}{\partial x . \partial y} = 0$, und 7) $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$

ergeben. Diese letzteren Gleichungen werden aber

$$8) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x . \partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$9) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x . \partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y . \partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} = 0$$

$$10) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y . \partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

welche für jeden Werth von x und y gelten, welche aber für diese bestimmten, $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ machenden Werthe von x und y, sich auf

$$11) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$12) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} = 0$$

$$13) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial V} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

zurückführen lassen, woraus sich die verlangten Werthe von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, für die oben gefundenen constanten Werthe von x und y, ebenfalls als constante Ausdrücke ohne weiteres angeben lassen. (Vergl. §. 13.).

Beispiele. 1) $V^2 - xyV - y^2x + x^3 = 0$.
2) $\text{Sin.}(V - x) - 2 \text{Cos.}(V + y) - \text{Sin.}(x + y) = 0$.

§. 20. Aufgabe.

Es ist gegeben $V = f(x, y)$, wo y selbst wieder eine durch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegebene Funktion von x ist. Man soll den Werth von x finden, welcher V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf die durch $V_{\varkappa} = f(x + \varkappa . \partial x, y_{x+\varkappa . \partial x})$ vorgestellten Nachbar-Werthe von V.

Auflösung. Man finde aus der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$,

das y in x ausgedrückt, und setze diesen Werth von y statt y in $V = f(x, y)$, so erhält man V als bloße Funktion von x, und die Aufgabe ist dann von der des (§. 10.) nicht verschieden.

Beispiele. 1) $V = 2xy + x\sqrt{2xy - y^2}$
und $\varphi = 2x^2y - 3a^3 = 0$
2) $V = x^2y - x^2 \operatorname{Sin.} 2y$
und $\varphi = 2xy + 2x \operatorname{Sin.} y - a = 0$
3) $V = 2xy + y(2x - y)$
und $\varphi = y^2(3x - y) - a^3 = 0$.

§. 21. Zusatz 1.

Will man aber des Auflösens der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ nach y überhoben seyn, so kann man y bereits als die durch $\varphi(x, y) = 0$ gegebene Funktion von x denken, und man hat dann nach (§. 10.), wenn man den Ausnahmsfall $\partial V = \infty$ übergeht, im Falle des Maximums oder Minimums

$$1)\ \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \text{ d. h. } \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

während y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ gegeben sind durch die Gleichungen $\varphi = 0$ und

$$2)\ \partial\varphi = 0 \text{ d. h. } \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

wo, wie schon oft, φ bloß statt $\varphi(x, y)$ geschrieben steht. Eliminirt man daher aus den Gleichungen (1. und 2.) das $\frac{\partial y}{\partial x}$, so erhält man die Gleichung, welche in Verbindung mit $\varphi = 0$ (durch Elimination von y) den Werth von x liefert, der $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ macht. Und es ist für diesen Werth von x (und den zugehörigen aus $\varphi(x, y) = 0$ zu findenden Werth von y) V in der angegebenen Beziehung ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$, für dieselben Werthe von x und y.

Nun ist aber

$$3)\ \frac{\overline{\partial^2 V}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

wo y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ gegeben sind durch die Gleichungen $\varphi = 0$, $\partial\varphi = 0$, $\partial^2\varphi = 0$, alle bloßen ∂ auf alles x bezogen; also durch $\varphi = 0$, durch die Gleichung (2.), und durch

$$4)\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x.\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

§. 22. Zusatz 2.

Um aus den Gleichungen (1. und 2. §. 21.) das $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu eliminiren, kann man sich auch, da sie lineär sind, der Methode des (E. §. 1.) bedienen, die Gleichung (2.) mit einem unbestimmten Ausdruck λ multipliciren und dann zu (1.) addiren, nachgehends aber λ so bestimmen, daß der Coefficient von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $=0$ wird. Dies giebt:

$$5)\ \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$ wenn λ bestimmt ist, durch

$$6)\ \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0;$$ so daß wenn aus (5. und 6.) das λ eliminirt wird, die Gleichung sich ergiebt, welche $\frac{\overline{\partial V}}{\partial x} = 0$ macht.

Nun lassen sich aber die Gleichungen (5. und 6.) auch so schreiben

$$7)\ \frac{\partial.(V+\lambda\varphi)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad 8)\ \frac{\partial.(V+\lambda\varphi)}{\partial y} = 0$$

indem man λ als von x und von y unabhängig (nach x und nach y constant) ansieht.

Daraus ergiebt sich also für die Auflösung der Aufgabe

des (§. 20.) folgende praktische Regel: „Man bilde sich aus „dem gegebenen V und der Gleichung $\varphi=0$ den (dem V „gleichen) Ausdruck $V+\lambda\varphi$, λ als nach x constant an„sehend, betrachte solchen als eine Funktion von x und y, „in welcher x und y von einander ganz unabhängig sind, „und suche die Bedingungen, welche unter der Voraus„setzung dieser fingirten Unabhängigkeit des y von „x, für das Maximum und Minimum von V statt finden „müssen, den Ausnahmsfall $\partial V=\infty$ nicht berücksichtigend."

Um jedoch durch diese praktische Regel (gewöhnlich die Methode der Multiplikatoren genannt) nicht irre geführt zu werden, untersuchen wir noch, wie weit sie gilt, mit welcher Beschränkung sie also muß angewandt werden. — Nach (§. 16.) giebt sie aber zunächst die Gleichungen (7. und 8.), also, weil λ als nach x und nach y constant angesehen wird, die Gleichungen (5. und 6.), welche durch Elimination des λ, in der That zu der gehörigen Bestimmung des x und dann auch des y führen, wie es dieser Fall haben will.

Wollte man aber nun weiter gehen, und die Unterscheidung des Maximums vom Minimo von $\partial^2.(V+\lambda\varphi)$ negativ oder positiv abhängen lassen, so würde man nur in so ferne dazu berechtigt seyn, als: 1) $V+\lambda\varphi=V$ ist, 2) λ genau den aus den Gleichungen (7. und 8.) oder (5. und 6.) in Verbindung mit $\varphi=0$ sich ergebenden constanten Werth hat, und insbesondere 3) hier das y nicht mehr als von x unabhängig angesehen, sondern genau als die durch die Gleichung $\varphi(x, y)=0$ gegebene Funktion von x genommen wird.

Schlüßlich wird diese praktische Regel (Methode der Multiplikatoren) auch nicht nothwendig alle Werthe von x und y liefern, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, sondern sich im Allgemeinen den Fällen versagen, in denen diese Werthe nicht aus $\partial V=0$ oder $\frac{\partial V}{\partial x}=0$,

sondern aus $\partial V = \infty$ oder $\frac{\partial V}{\partial x} = \infty$ zu entnehmen seyn würden.

§. 23. Zusatz 3.

Man kann die (§. 20.) gelößte Aufgabe, auch noch aus folgendem Gesichtspunkte betrachten. — Da nehmlich y die durch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegebene Funktion von x vorstellt, so geht, während x in $x_{\shortparallel}$ übergeht, auch y in $y_{\shortparallel}$ über, wie in der Aufgabe (§. 16.), nur mit dem Unterschiede, daß zwischen $y_{\shortparallel}$ und $x_{\shortparallel}$ noch die Gleichung $\varphi(x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel}) = 0$ statt findet, so daß erstlich ∂y, $\partial^2 y$, etc. als Funktionen von x gedacht werden müssen, und zweitens zwar $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, etc. $= 0$ genommen werden können, aber im Allgemeinen nicht $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, etc., weil diese durch die Gleichungen $\partial\varphi = 0$, $\partial^2\varphi = 0$, etc. etc., welche mit $\varphi(x, y) = 0$ und $\varphi(x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel}) = 0$ zugleich existiren, gegeben und von ∂x abhängig sind (B. §. 35.).

Es ist dann wie (§. 16.):

$$1)\ \partial V = \frac{\partial V}{\partial x}.\partial x + \frac{\partial V}{\partial y}.\partial y$$

$$2)\ \partial^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\partial x.\partial y + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\partial y^2 + \\ + \frac{\partial V}{\partial x}.\partial^2 x + \frac{\partial V}{\partial y}.\partial^2 y;$$

aber auch noch aus $\partial\varphi = 0$, $\partial^2\varphi = 0$,

$$3)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}.\partial x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\partial y = 0 \quad \text{und}$$

$$4)\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.\partial x^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x.\partial y}.\partial x.\partial y + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.\partial y^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}.\partial^2 x + \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\partial^2 y = 0.$$

Nach (§. 6.) muß nun im Falle eines Maximums oder Minimums, wenn man $\partial V = \infty$ nicht berücksichtigen will,

$$5)\ \partial V = 0,\ \text{d. h.}\ \frac{\partial V}{\partial x}.\partial x + \frac{\partial V}{\partial y}.\partial y = 0 \quad \text{seyn,}$$

aber nicht für jedes δx und δy, sondern nur für jedes δx, aber für das durch die Gleichung (3.) gegebene δy. — Eliminirt man daher δy aus den Gleichungen (3.) und (5.), so erhält man für das Maximum oder Minimum nach (E. §. 1.):

6) $\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$ wenn λ bestimmt ist durch

7) $\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0;$

welches dasselbe (§. 22.) bereits gefundene Resultat ist, in Bezug auf die Bestimmung der Werthe von x und von y.

Dann wird V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn, wenn $\delta^2 V$ für jedes δx, aber nur für die durch die Gleichungen (3. und 4.) gegebenen δy und $\delta^2 y$ ($\delta^2 x$ kann $=0$ genommen werden) beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist. Man muß also aus den Gleichungen (2.) und (4.) erst $\delta^2 y$ eliminiren, und für δy den aus (3.) zu findenden Werth setzen, wenn man

8) $\delta^2 V$ von der Form $A . \delta x^2$ haben will, wo A ursprünglich eine Funktion von x und y, für die hiesigen bestimmten Werthe dieser letztern aber constant geworden ist, und nun mit $\delta^2 V$ zugleich $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, da δx^2 positiv gedacht werden muß.

Wegen des Eliminirens von $\delta^2 y$ aus den Gleichungen (2. und 4.) möchte es vielleicht gerathener seyn, statt V lieber $V + \lambda\varphi$ (welches $= V$ ist) zu nehmen, und das $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von V, von $\delta^2(V+\lambda\varphi)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ abhängen zu lassen, weil sich $\delta^2(V+\lambda\varphi)$ wegen der Gleichungen (6. und 7.) sogleich auf

$$\delta x^2 . \left(\frac{\partial^2(V+\lambda\varphi)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(V+\lambda\varphi)}{\partial x . \partial y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\partial^2(V+\lambda\varphi)}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2\right)$$

zurückzieht, wo λ den aus den Gleichungen (6. 7.) zu ziehenden constanten Werth vorstellt, und wo statt $\frac{\delta y}{\delta x}$ der aus (3.) zu entnehmende Werth $\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ zu setzen ist, so daß dann der mit δx^2 (in den großen Klammern stehende) multiplicirte Theil der Ausdruck seyn wird, den wir oben durch A bezeichnet haben.

Anmerkung 1. Man kann also auch von diesem Gesichtspunkte aus die (§. 22.) erwähnte „Methode der Multiplikatoren" in Anwendung bringen, erhält $V = V + \lambda\varphi$ und

$$\delta V = \delta.(V+\lambda\varphi) = \frac{\partial(V+\lambda\varphi)}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial(V+\lambda\varphi)}{\partial y}.\delta y$$

und kann hier x und y, also δx und δy als von einander unabhängig ansehen, weil dies zu den Gleichungen (6. und 7.) führt, die, wie man weis, für die Bestimmung von x und y die richtigen sind. — Wollte man aber in dem obigen Ausdruck für $\delta^2 V$ oder $\delta^2.(V+\lambda\varphi)$, noch x von y und δx von δy als unabhängig ansehen, so würde man für die nähere Entscheidung des Maximums oder des Minimums offenbar unrichtige Resultate erhalten. Doch mag es bequemer seyn, wie wir gesehen haben, auch hier $V+\lambda\varphi$ statt V zu setzen, wenn man nur hier die Abhängigkeit des y von x, und dann auch des δy von δx gehörig in Rechnung bringt.

Man mag also wohl beachten, daß die bei der Methode der Multiplikatoren angenommene Unabhängigkeit des y von x keine reelle, sondern nur eine fingirte ist, und daß diese Fiktion nur so lange beibehalten werden darf, als nach der vorstehenden Theorie, durch sie nothwendig richtige Resultate geliefert werden, also namentlich nur zur Bestimmung der Werthe von x und von y, keinesweges aber da, wo durch die Variations-Coefficienten der zweiten Ordnung das Maximum von dem Minimo unterschieden werden soll.

Anmerkung 2. Uebrigens gehört diese Untersuchung des vorstehenden Paragraphen zu den Fällen, wo man ein unrichtiges Resultat erhalten würde, in Bezug auf die Bedingung durch welche das Maximum von dem Minimo unterschieden wird, wenn man in $V_{\varkappa} = f(x_{\varkappa}, y_{\varkappa})$ die Variationen $x_{\varkappa}$ und $y_{\varkappa}$ zugleich nur von der Form $x+\varkappa.\delta x$ und

$y + \varkappa . \delta y$ nehmen wollte. *) — Denselben Fehler findet man jedoch auch in einigen Elementar-Lehrbüchern, wo man bei dieser Aufgabe (§. 16.) x und y in $x + \varkappa . m$ und $y + \varkappa . n$ übergehen läßt, und nachher dieses ungeändert beibehält, wenn auch noch zwischen x und y eine Gleichung gegeben ist, während doch dann, so wie x in $x + \varkappa . m$ übergeht, y nothwendig im Allgemeinen in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende unendliche Reihe verwandelt werden wird. — Was aber hier m und n ist, wurde oben durch δx, δy bezeichnet.

§. 24. Zusatz 4.

Von der Aufgabe der (§. §. 20—23.) ganz verschieden, wenn auch im Kalkul mit dem (§. 23.) geführten ziemlich zusammenfallend, wäre jedoch die Aufgabe, wo $V = f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum werden soll, in Bezug auf diejenigen nächst größern und nächst kleinern Werthe von x und y, welche einer gegebenen Funktion

$\varphi(x, y)$ unverändert denselben aber nicht gegebenen Werth lassen.

Hier ist nehmlich, da $\varphi(x_\varkappa, y_\varkappa) = \varphi(x, y)$ seyn soll, unabhängig von $\varkappa$, offenbar auch

$$\varphi(x_\varkappa, y_\varkappa) - \varphi(x, y) \text{ d. h. } \varkappa . \delta\varphi + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2\varphi + \text{etc. etc.}$$

unabhängig von $\varkappa$, der Null gleich, also auch genau wie im (§. 23.):

$$\delta\varphi = 0, \quad \delta^2\varphi = 0, \text{ etc.},$$

wenn auch nicht $\varphi = 0$. Man erhält daher hier genau dieselbe Rechnung wie im (§. 23.), mithin auch dieselben Gleichungen (6. und 7.), aus denen dann λ eliminirt wird, um die Gleichung zwischen x und y zu erhalten, welche hier $\delta V = 0$ macht. — Da aber hier nicht, wie in den (§. §. 20—23.) auch noch die Gleichung $\varphi = 0$ gegeben, so werden y und x

---

*) Vergl. Annales de Mathem. T. XIII. 1822. p. 3. seqq. und: „Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung." Berlin 1823. (p. 4. §. 4.).

nicht zugleich bestimmt, sondern es wird bloß y in x ausgedrückt seyn, so daß x selbst noch ganz unbestimmt bleibt.

Hinsichtlich der Untersuchung, ob wirklich ein Maximum oder Minimum statt finde, in der angegebenen Beziehung, und welches von beiden, bleibt die Rechnung ebenfalls wieder genau dieselbe wie im (§. 23.), nur mit dem Unterschiede, daß hier nicht wie dort $V + \lambda\varphi = V$, dagegen hier eben so wie dort $\delta^2 V = \delta^2 V + \lambda . \delta^2 \varphi$ seyn wird, weil hier nicht $\varphi = 0$, aber doch $\delta^2 \varphi = 0$ ist.

Beispiele. 1) Es ist gegeben $V = ax^2 - bxy - y^3$ als die Gleichung einer Fläche (eines Körpers), V die dritte Coordinate; man soll die größte oder kleinste Coordinate V finden, in Bezug auf alle diejenigen nächst anliegenden Coordinaten V, deren Fußpunkte von einem, durch $x = \alpha$ und $y = \beta$ gegebenen Punkt der Abscissen-Ebene (xy) gleich weit abstehen. — Hier ist $\varphi(x, y)$ offenbar der Ausdruck $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$ welcher unverändert bleiben (invariabel seyn) soll, wenn sein Werth auch nicht gegeben, sondern dafür vielleicht irgend eine andere Bedingung gegeben ist, z. B. die, daß der zu der gesuchten größten oder kleinsten Ordinate gehörige Punkt zu gleicher Zeit in einer zweiten gegebenen Fläche liegen soll.

Bemerkung.

Ist V eine Funktion von z, die jedoch auch noch x und y enthält, und hat man die Werthe für z gefunden (in x und y ausgedrückt) und die nöthige, aus der zweiten Variation hergenommene Bedingung, unter welcher $V = f(x, y, z)$ nothwendig ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn muß, in Bezug auf die zu den nächst angrenzenden Werthen von z gehörigen Werthe von V, die durch $f(x, y, z_{\kappa})$ vorgestellt seyn können; so wird dadurch V in eine bloße Funktion von x und y verwandelt, und man kann nun für diese letztere, alle die Aufgaben von (§. 15.—§. 22.) in Anwendung bringen, so zwar daß V entweder in jeder Beziehung ein Maximum oder in jeder Beziehung ein Minimum, als auch in der einen Beziehung ein Maximum, dasselbe V dagegen in einer andern Beziehung ein Minimum wird. — Von allen diesen Aufgaben muß jedoch als verschieden angesehen werden, wenn sie

vielleicht auch mit der einen oder der andern in den Resultaten zusammenfällt, die folgende

§. 25. Aufgabe.

Die Werthe von x, y, z, zu finden, welche $V = f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle möglichen Nachbar-Werthe von V, die sich ergeben, wenn man bald die nächst größern und nächst kleinern Werthe von x allein, oder von y allein, oder von z allein, oder von x und y in beliebiger Verbindung, eben so von x und z und von y und z, oder endlich von x, y, z in beliebiger Verbindung, beziehlich statt x, y, z, gesetzt denkt.

Auflösung. Alle diese Nachbar-Werthe in Bezug auf welche V ein Maximum oder Minimum werden soll, sind ausgedrückt durch

$$V_{x} = f(x_{x}, y_{x}, z_{x});$$

daher ist hier (B. §. 5. oder B. §. 8.):

$$1)\ \delta V = \frac{\partial V}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}.\delta z$$

$$2)\ \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\delta x.\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial z}.\delta x.\delta z$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial z}.\delta y.\delta z + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.\delta z^2 + \frac{\partial V}{\partial x}.\delta^2 x + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z}.\delta^2 z.$$

Setzt man nun nach (§. 6.)

$$\text{I.}\quad \delta V = 0,$$

so giebt dies, wegen der Willkührlichkeit von $\delta x, \delta y, \delta z$,

$$3)\ \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad 4)\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad 5)\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

welche Gleichungen diejenigen Werthe von x, y und z geben, die $\delta V = 0$ machen.

Vermöge derselben Gleichungen fallen für diese Werthe von x, y, z, die letzten mit $\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z$ behafteten Glieder von $\delta^2 V$ ganz weg, und wenn man das, was aus

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

für diese bestimmten Werthe von x, y und z wird, durch beziehlich A, B, C, D, E, F, so wie die willkührlichen δx, δy, δz beziehlich durch p, q, r, bezeichnet, so findet man (E. §. 8.) die Bedingungen bereits ausgesprochen, welche erfüllt seyn müssen, wenn $\delta^2 V$ beständig $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$, also V selbst ein $\left\{ \begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix} \right\}$ seyn wird.

Setzt man ferner nach (§. 6.), um kein System von Werthen von x, y, z, welche V in der angegebenen Beziehung zu einem Maximum oder Minimum machen, zu übergehen, auch noch

$$\text{II.}\quad \delta V = \infty,$$

so wird, da δx, δy, δz willkührlich sind, entweder $\frac{\partial V}{\partial x} = \infty$ oder $\frac{\partial V}{\partial y} = \infty$ oder $\frac{\partial V}{\partial z} = \infty$ seyn, und da im Falle des Maximums oder Minimums $\delta V = 0$ oder $= \infty$ seyn muß, unabhängig von δx, δy, δz, so kann auch $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ nur $= 0$ oder $= \infty$ seyn, so daß man noch die Gleichungen nehmen muß:

$$6)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = \infty;$$

$$7)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

$$8)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

$$9)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = \infty;$$

$$10)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = \infty;$$

$$11)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

endlich

$$12)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \infty,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = \infty.$$

Für alle aus jedem dieser 7 Systeme von Gleichungen gezogenen Werthe von $x, y, z,$ muß man dem (§. 7.) gemäß untersuchen, ob sie nicht noch ein Maximum oder Minimum liefern, in der angegebenen Beziehung.

Beispiele. 1) $V = \frac{y-x^2}{y^3-x} - \left(\sqrt[3]{x^3-2xyz-z^2}\right)^2;$

2) $V = \frac{y-x^2}{y^3-x} - \left(\sqrt[3]{x^2-2xyz-z^2}\right)^4;$

3) $V = \text{Sin.}\,(x-y) + z^2 . \frac{y-x-x^3}{z-x^2}.$

§. 26. Zusatz 1.

Wir haben in der vorstehenden Auflösung, $x, y, z,$ und daher auch $\delta x, \delta y, \delta z,$ als constant gedacht. Man konnte auch y und z als Funktionen von x sich denken, oder auch z als eine Funktion von x und y, und hätte dann immer genau dieselben Entwicklungen erhalten von Punkt zu Punkt, wie im (§. 25.), so bald man jeden Veränderlichen für sich allein variiren ließ und nur in so ferne er explicit in V enthalten ist, weil man dann dasselbe $V_{„}$ für die Nachbar-Werthe erhält, wie im (§. 25.).

Denkt man sich aber zuerst $V_{„} = f(x, y, z_{„})$, wo wie (B. §. 30.) die Coefficienten von $V_{„}$, $z_{„}$ durch δ_1 bezeichnet seyn mögen, und wo z und daher auch $\delta_1 z$, $\delta_1^2 z$, etc. als Funktionen von x und y angesehen werden sollen. Wird dann auch noch $V_{(„)}$ dadurch gebildet, daß man in $V_{„}$ alles x und alles y sowohl außerhalb als auch innerhalb (nehmlich in z, $\delta_1 z$, $\delta_1^2 z$, etc.) in $x_{„}$, $y_{„}$ übergehen läßt, und bezeichnet man die Coefficienten von $x_{„}$, $y_{„}$, und $z_{(„)}$ (was aus $z_{„}$ wird, wenn x und y in $x_{„}$, $y_{„}$ übergehen) und $V_{(„)}$ durch die bloßen δ, so drückt $V_{(„)}$ offenbar, wegen der Willkührlichkeit von δx, δy und auch von $\delta_1 z$ (δz ist dagegen von δx, δy, $\delta_1 z$ abhängig) noch immer alle Nachbar-Werthe von V aus, in deren Beziehung nach der Aufgabe (§. 25.)

V ein Maximum oder Minimum werden soll. — Dann ist aber nach (B. §. 30.)

$$1)\quad \delta V = \delta_1 V + \frac{\partial V}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y,$$

während

$$2)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad 3)\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

und (B. §. 5. oder §. 7.)

$$4)\quad \delta_1 V = \frac{\partial V}{\partial z}.\delta_1 z \qquad \text{ist.}$$

Berücksichtigt man nun $\delta V = \infty$ nicht, sondern setzt bloß nach (§. 6.) für das Maximum oder Minimum,

$$\delta V = 0,$$

so giebt dies wegen der Willkührlichkeit von δx, δy,

$$\delta_1 V = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

oder nach (4.), weil $\delta_1 z$ willführlich ist,

$$5)\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

wodurch z als Funktion von x und y bestimmt ist, wodurch aber auch die beiden andern Gleichungen vermöge (2. und 3.) auf

$$6)\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad \text{und} \qquad 7)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

zurückgeführt werden, so daß (5. 6. und 7.) zur Bestimmung von x, y, und dann auch von z dienen.

Ferner wird dann nach (B. §. 30.)

$$8)\quad \delta^2 V = \delta_1^2 V + 2.\frac{\partial.\delta_1 V}{\partial x}.\delta x + 2.\frac{\partial.\delta_1 V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\delta x^2 + 2.\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\delta x.\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + \frac{\partial V}{\partial x}.\delta^2 x + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y.$$

Für diejenige Funktion z von x und y aber, welche $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ macht, ist $\delta_1 V = 0$ als Funktion von x sowohl, als auch als

Funktion von y betrachtet, d. h. für jeden Werth von x und für jeden Werth von y. Deshalb sind nun auch

$$9)\ \frac{\partial . \delta_1 V}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad 10)\ \frac{\partial . \delta_1 V}{\partial y} = 0.$$

Ferner ist für dieselbe Funktion z von x und y, welche $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ macht, nach (2. und 3.) auch noch

$$11)\ \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{und} \quad 12)\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \text{dahero}$$

$$13)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial . \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z} . \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$14)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial . \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z} . \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{oder} \quad = \frac{\partial . \frac{\partial V}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial z} . \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$15)\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial . \frac{\partial V}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial z} . \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Weil aber z die durch $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ bestimmte Funktion von x und y bedeutet, so wird $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ bestimmt seyn, durch die Differential-Gleichungen von $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$, sowohl nach x als auch nach y genommen, also durch

$$16)\ \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ \text{und}\ 17)\ \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Zuletzt ist

$$18)\ \delta_1^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \delta_1 z^2 + \frac{\partial V}{\partial z} . \delta_1^2 z = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \delta_1 z^2,$$

wenn z die aus $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ gezogene Funktion von x und y vorstellt.

Findet man nun aus (16. und 17.) die Werthe von

$\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, substituirt solche in (13. 14 und 15.); nimmt man ferner (9. und 10., 2. und 3., 6. und 7. und zuletzt 18.) zu Hilfe, so erhält man aus (8.), die Bezeichnung des (§. 25.) gebrauchend,

$$19)\ \delta^2 V = F.\delta_1 z^2 + \left(A - \frac{D^2}{F}\right).\delta x^2 + 2\left(B - \frac{DE}{F}\right).\delta x.\delta y + \\ + \left(C - \frac{E^2}{F}\right).\delta y^2,$$

welches für jeden reellen Werth von δx, δy und $\delta_1 z$ offenbar $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, wenn F und zugleich

$$\left(A - \frac{D^2}{F}\right).\delta x^2 + 2\left(B - \frac{DE}{F}\right).\delta x.\delta y + \left(C - \frac{E^2}{F}\right).\delta y^2$$

für jeden reellen Werth von δx und δy beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind. Dieses letztere ist aber dann der Fall, nach (E. §. 5.), wenn $A - \frac{D^2}{F}$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ und zugleich

$$\left(A - \frac{D^2}{F}\right)\left(C - \frac{E^2}{F}\right) > \left(B - \frac{DE}{F}\right)^2$$

ist, welches daher in Verbindung mit F $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ zu denselben Resultaten führt, die (§. 25.) ebenfalls erhalten worden sind.

Anmerkung. Anfänger in der Differential-Rechnung könnten vielleicht glauben, daß weil wir aus $\delta_1 V = 0$, abgeleitet haben $\frac{\partial.\delta_1 V}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial.\delta_1 V}{\partial y} = 0$, man aus $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ auch ableiten könnte $\frac{\partial.\frac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} = 0$. Dies würde auch richtig geschlossen seyn, wenn $\frac{\partial V}{\partial x}$ als Funktion von x identisch, d. h. für jeden Werth von x, der Null gleich wäre. Aber die Gleichung (7.) $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, existirt nur für denjenigen bestimmten Werth von x (und von y), welcher eben aus der Auflösung

der Gleichung $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ (und $\frac{\partial V}{\partial y}=0$) sich ergiebt. Als Funktion von x betrachtet ist daher nicht $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, und daher auch ihre Ableitung nach x nicht Null. Dasselbe gilt von $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, u. s. w. — Für Anfänger kann man aber nicht genug thun, um das Wesen der Differential-Gleichungen in jeder Beziehung klar erkennen zu lassen, weshalb diese Rückblicke hier erlaubt seyn mögen.

§. 27. Zusatz 2.

Ferner konnte man sich die Aufgabe (§. 25.) auch noch so denken: Man konnte y und z als Funktion von x ansehen und zuerst $V_{\varkappa}=f(x, y_{\varkappa}, z_{\varkappa})$ bilden, wo

$$y_{\varkappa}=y+\varkappa.\delta_1 y+\text{etc.}; \quad z_{\varkappa}=z+\varkappa.\delta_1 z+\text{etc.}$$

und $V_{\varkappa}=V+\varkappa.\delta_1 V+\text{etc. etc.}$ seyn soll. — Dann konnte man $V_{(\varkappa)}$ aus $V_{\varkappa}$ dadurch bilden, daß man alles x, sowohl außerhalb als innerhalb (in y, $\delta_1 y$, etc. z, $\delta_1 z$, etc.) in $x_{\varkappa}$ übergehen ließ. Bezeichnet man das, was dadurch aus $y_{\varkappa}$, $z_{\varkappa}$ wird, beziehlich durch $y_{(\varkappa)}$, $z_{(\varkappa)}$, so wird dann

$$V_{(\varkappa)}=f(x_{\varkappa}, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)}),$$

wo die Coefficienten von $V_{(\varkappa)}$, so wie von $y_{(\varkappa)}$ und $z_{(\varkappa)}$, durch die bloßen δ angedeutet werden. — So gedacht, stellt $V_{(\varkappa)}$ wiederum genau diejenigen Nachbar-Werthe von V vor, in Bezug auf welche im (§. 25.) V ein Maximum oder Minimum werden soll, weil noch immer δx, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ ganz willkührlich, und eben deshalb von einander unabhängig sind (wenn auch δy, δz, bestimmte in δx, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ auszudrückende Werthe haben).

Nach (§. 6. und §. 7.), wenn man $\delta V=\infty$ nicht berücksichtigt, muß man wiederum

$$\delta V=0$$

setzen, und es wird dann V ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ seyn, wenn $\delta^2 V$, $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist, für dieselben aus $\delta V=0$ gefundenen Werthe von x, y und z.

Unter der jetzigen Voraussetzung hat man aber nach (V. §. 26.):

1) $\delta V = \delta_1 V + \partial V . \delta x$,

wo sich jedes ∂ auf alles x bezieht. (E. §. 44.).

Ferner:

2) $\delta^2 V = \delta_1^2 V + 2 . \partial . (\delta_1 V) . \delta x + \partial^2 V . \delta x^2 + \partial V . \delta^2 x$.

Dabei (V. §. 5. oder V. §. 8.):

3) $\delta_1 V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta_1 y + \frac{\partial V}{\partial z} . \delta_1 z$, und

4) $\delta_1^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta_1 y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial z} . \delta_1 y . \delta_1 z + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \delta_1 z^2 +$

$+ \frac{\partial V}{\partial y} . \delta_1^2 y + \frac{\partial V}{\partial z} . \delta_1^2 z$.

Die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt, weil δx willkührlich ist, in

5) $\delta_1 V = 0$ und 6) $\partial V = 0$,

während $\delta_1 V = 0$, weil $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ eben so willkührlich und von einander unabhängig sind, wiederum (nach 3.) in

7) $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ und 8) $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ zerfällt.

Die letztern beiden Gleichungen dienen nun zur Bestimmung von y und z als Funktionen von x, und reduciren die Gleichung (6.) oder

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} . \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{auf}$$

10) $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$,

wodurch auch noch x bestimmt wird. —

Weil nun $\delta_1 V = 0$ ist, als Funktion von x d. h. für jeden Werth von x, so ist auch

11) $\partial . \delta_1 V = 0$.

Und weil für dieselben Funktionen y und z von x, welche $\delta_1 V = 0$ machen, auch

12) $\partial V = \frac{\partial V}{\partial x}$ wird, so ist auch

$$13)\quad \partial^2 V = \partial . \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z} . \frac{\partial z}{\partial x},$$

während $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ gegeben sind durch die Gleichungen

$$\partial . \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \partial . \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0,$$ d. h. durch

$$14)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial z} . \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{und}$$

$$15)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x . \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial z} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Findet man hieraus $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$, substituirt ihre Werthe in (13.), so reducirt sich die Gleichung (2.), wenn noch die Bezeichnung des (§. 25.) gebraucht wird, auf

$$16)\quad \delta^2 V = C . \delta_1 y^2 + 2E . \delta_1 y . \delta_1 z + F . \delta_1 z^2 + \partial^2 V . \delta x^2;$$

$$\text{wo } \partial^2 V \text{ jetzt } = A + B . \frac{BF - DE}{E^2 - CF} + D . \frac{CD - BE}{E^2 - CF}$$

$$= \frac{AE^2 + B^2 F + CD^2 - ACF - 2BDE}{E^2 - CF}$$

ist; und dieses $\delta^2 V$ ist offenbar für jeden reellen Werth von δx, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, also V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, wenn dieses $\partial^2 V$ und zugleich $C . \delta_1 y^2 + 2E . \delta_1 y . \delta_1 z + F . \delta_1 z^2$ für jeden reellen Werth von $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, wodurch man nach (E. §. 3. u. 4.) zu denselben Resultaten geführt wird, die bereits (§. 25. und §. 26.) für diesen Fall erhalten worden sind.

§. 28. Zusatz 3.

Von diesen Gesichtspunkten ganz verschieden ist dagegen der mit (§. 18.) analoge, unter welchem die Aufgabe (§. 25.) noch betrachtet werden kann. — Da es nehmlich zuletzt auf ein's hinausläuft, ob man y und z als von x ganz unabhängig, oder ob man sie als völlig willkührliche, jede Form

annehmende Funktionen von x sich denkt, so kann hier letzteres geschehen, und eben wegen der gänzlichen Formlosigkeit des y und des z, sind dann auch $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ der Form und somit auch dem Werthe nach völlig beliebige, ganz willkührliche Ausdrücke. Denkt man sich nun unter dieser Voraussetzung, in $V = f(x, y, z)$ x in $x_{\prime\prime}$ übergehend, so gehen zugleich y in $y_{\prime\prime}$ und z in $z_{\prime\prime}$ dergestalt über, daß (B. §. 5. oder B. §. 7.):

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial x}.\delta x, \qquad \delta z = \frac{\partial z}{\partial x}.\delta x \qquad \text{ist;}$$

folglich, weil $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ ganz willkührlich sind, auch δy und δz von δx bloß der Form nach abhängig, dem Werthe nach aber völlig unabhängig, so daß diese δy, δz, dem Werthe nach eben so willkührlich wie δx selbst sind. Aber eben deswegen, weil, während δx einen willkührlichen Werth hat, δy, δz noch jeden möglichen haben können, und umgekehrt, drückt dieses $V_{\prime\prime} = f(x_{\prime\prime}, y_{\prime\prime}, z_{\prime\prime})$ unter diesem Gesichtspunkte, wiederum genau alle die Nachbar-Werthe von V aus, in Bezug auf welche V selbst (nach §. 25.) ein Maximum oder Minimum werden soll.

In dieser Annahme hat man aber:

$$1)\ \delta V = \frac{\partial V}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}.\delta z,$$

wo jedoch, weil y und z als Funktionen von x gedacht sind,

$$2)\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial x}.\delta x, \qquad 3)\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial x}.\delta x,$$

so daß, diese Werthe aus (2. und 3.) in (1.) substituirend:

$$4)\ \delta V = \delta x\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{*)} \qquad \text{wird.}$$

*) Da $V = f(x, y, z)$ als bloße Funktion von x betrachtet wird, welches x in V explicit und implicit (in y und z) vorkommt, so hatte man eigentlich sogleich unmittelbar nach (B. §. 5.):

Ferner:

5) $\delta^2 V = \partial^2 V . \delta x^2 + \partial V . \delta^2 x$,

wo das bloße ∂ sich auf alles x bezieht.

Berücksichtigt man nun nicht den Ausnahmsfall $\delta V = \infty$, sondern setzt man bloß (§. 6.) im Falle des Maximums oder Minimums $\delta V = 0$, so erhält man $\partial V = 0$ oder

6) $\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} . \frac{\partial z}{\partial x} = 0$,

welche Gleichung, da $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ ganz willkührlich sind, in

7) $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ zerfällt.

Wegen $\partial V = 0$, wird aber die Gleichung (5.) jetzt:

8) $\delta^2 V = \partial^2 V . \delta x^2$,

wo, die Bezeichnung des (§. 25.) gebrauchend:

$$\partial^2 V = A + 2B . \frac{\partial y}{\partial x} + C\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2D . \frac{\partial z}{\partial x} + 2E . \frac{\partial y}{\partial x} . \frac{\partial z}{\partial x} + F . \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

ist; und da hier $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ ganz willkührliche (wenn auch immer reell gedachte) Ausdrücke sind, so liefert dieses $\partial^2 V$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ nach (E. §. 8.) dieselben Bedingungen für das $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$, die in den 3 vorhergehenden (§. §.) immer schon gefunden worden sind.

§. 29. Zusatz 4.

Auch leidet es keinen Zweifel, daß man in der gegebenen Aufgabe (§. 25.) noch z allein als eine völlig formlose

---

$$\delta V = \partial V . \delta x = \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} . \frac{\partial z}{\partial x}\right) . \delta x.$$

Aus diesem Gesichtspunkte ist die Gleichung (n. 5.) genommen.

Funktion von x und y, letztere aber als zwei von einander ganz unabhängige absolut Veränderliche betrachten könne. Dann sind $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ der Form und somit auch dem Werthe nach ganz willkührliche Ausdrücke, und

$$V_{,,}=f(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})$$

die Nachbar-Werthe von V, in Bezug auf welche V selbst das Maximum oder Minimum werden soll, wo aber $z_{,,}$ dadurch allein entstanden gedacht ist, daß in z als Funktion von x und y, dieses x und y in $x_{,,}$, $y_{,,}$ übergegangen ist, so daß $\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}.\partial x+\frac{\partial z}{\partial y}.\partial y$ wird.

Dann ist (B. §. 5. oder B. §. 8.):

$$1)\ \partial V=\frac{\partial V}{\partial x}.\partial x+\frac{\partial V}{\partial y}.\partial y$$

$$2)\ \partial^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\partial x^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\partial x.\partial y+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\partial y^2+$$
$$+\frac{\partial V}{\partial x}.\partial^2 x+\frac{\partial V}{\partial y}.\partial^2 y.$$

Und im Falle des Maximums oder Minimums (wenn $\partial V=\infty$ nicht berücksichtigt wird) nach (§. 6.):

$$\partial V=0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y}=0, \quad \text{d. h.}$$

$$3)\ \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad 4)\ \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

welche Gleichungen wegen der Willkührlichkeit von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ zerfallen in

$$4)\ \frac{\partial V}{\partial x}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y}=0 \text{ und } \frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Die Gleichung (2.) reducirt sich nun auf

$$5)\ \partial^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\partial x^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\partial x.\partial y+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\partial y^2,$$

welches $\partial^2 V$ also beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, mithin V selbst ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ ist, wenn I. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ und zugleich II. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}\right)^2>0$ ist; während, wenn man die Bezeichnung des (§. 25.) benützt:

$$6)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=A+2D.\frac{\partial z}{\partial x}+F.\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,$$

$$7)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}=B+D.\frac{\partial z}{\partial y}+E.\frac{\partial z}{\partial x}+F.\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

und $$8)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=C+2E.\frac{\partial z}{\partial y}+F.\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$ ist.

Die Bedingung (I.) erfordert daher, weil $\frac{\partial z}{\partial x}$ ganz willkührlich ist, nach (E. §. §. 3. 4.):

daß A $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ und zugleich $AF-D^2>0$ sey.

Die Bedingung (II.) dagegen reducirt sich, wenn man aus (6. 7. und 8.) die Werthe gesetzt hat, auf

$$(AC-B^2)+2(CD-BE)\frac{\partial z}{\partial x}+(CF-E^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+$$
$$+2(AE-BD).\frac{\partial z}{\partial y}+2(DE-BF).\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}+(AF-D^2).\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

beständig positiv (>0), für jeden reellen Werth von $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, welches, da schon $AF-D^2$ positiv ist, nach (E. §. 8.) zu den (§. 25—28.) bereits gefundenen Bedingungen des Maximums und Minimums von V führt.

Anmerkung. Anfänger möchten vielleicht geglaubt haben, daß weil hier abermals

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial V}{\partial z}=0$$

gefunden worden, und z hier wie im (§. 26.), als eine Funktion von x

und y gedacht worden ist, hier wieder, wie im (§. 26.), in so ferne für die gefundenen Werthe von x, y, z, nothwendig wieder, wie dort

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \text{seyn muß,}$$

auch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=A+D.\frac{\partial z}{\partial x},$$

eben so

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=B+E.\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=B+D.\frac{\partial z}{\partial y},$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=C+E.\frac{\partial z}{\partial y}$$

genommen, und entweder $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ganz willkührlich gedacht, oder wohl gar, wie (§. 26.) durch die Gleichungen

$$\frac{\partial.\frac{\partial V}{\partial z}}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial.\frac{\partial V}{\partial z}}{\partial y}=0$$

als gegeben angesehen werden müssen. Dies wäre aber jedesmal der gegenwärtigen Ansicht unangemessen und würde in jedem Falle zu unrichtigen Resultaten führen. Denn dort im (§. 26.) ist z wie hier, als eine Funktion von x und y gedacht, die sich aber dort als eine bestimmte durch die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ gegebene auswieß *), während hier

---

*) Man bemerke nehmlich wohl, daß die dortige Gleichung $\partial V=0$ zerfiel in

$$\partial_1 V=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$ während $\partial_1 V=\frac{\partial V}{\partial z}.\partial_1 z$ ist, so daß $\partial_1 V=0$ in $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ übergeht, die beiden andern Gleichungen aber nur unter der Voraussetzung, daß z die durch $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ bestimmte Funktion von x und y vorstellt, in die einfachern $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ übergehen.

ausdrücklich zur Bedingung der Ansicht gemacht ist, daß die Funktion z der Form nach ganz unbestimmt seyn soll, hier also durch keine Gleichung $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ gegeben seyn kann, weil sie eben dadurch in eine Funktion von bestimmter Form übergehen würde, der Bedingung der Ansicht entgegen. Die hiesigen Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ ergeben sich auch nur unter ausdrücklicher Voraussetzung der gänzlichen Willkührlichkeit von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, also der gänzlichen Formlosigkeit von z, und bestimmen nur die constanten Werthe von x, y, z, ohne z als eine bestimmte Funktion von x und y zu liefern. Aber eben deshalb ist hier nicht, wie dort (§. 26.) $\frac{\partial V}{\partial z}$ als eine Funktion von x, oder als eine Funktion von y identisch $=0$ anzusehen, sondern es ist $\frac{\partial V}{\partial z}$ nur für den bestimmten und constanten Werth von z, und nur für die bestimmten und constanten Werthe von x und y (nicht aber für alle Werthe von x oder y) der Null gleich. — Eben so wenig ist hier $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}$ oder $\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}$ als Funktion von x oder von y, sondern es existiren diese Gleichungen nur für dieselben constanten Werthe von x, y, z (und nicht für jeden Werth von x, so wenig wie für jeden Werth von y). Und eben deshalb ist auch nicht

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial \cdot \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} \quad \text{und nicht} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y}=\frac{\partial \cdot \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial y} \quad \text{u. s. w.}$$

zu nehmen, sondern nur so zu verfahren, wie dies in dem vorstehenden Zusatze wirklich geschehen ist.

§. 30. Zusatz 5.

Ist in der Aufgabe des (§. 25.) die Funktion V von x, y und z nicht entwickelt gegeben, sondern verwickelt durch die Gleichung

$$\psi(x, y, z, V)=0,$$

so erhält man $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, wenn man diese Gleichung ψ nach x, nach y, und nach z differentiirt; d. h. indem man die Gleichungen nimmt:

1) $\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=0,$

2) $\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=0,$

3) $\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}=0;$

und da diese Gleichungen, wenn man $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}=0$ nimmt, unter der Voraussetzung daß $\frac{\partial\psi}{\partial V}$ nicht ∞ ist, sich auf

4) $\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$ 5) $\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$ und 6) $\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$

zurückziehen, so geben diese letztern Gleichungen in Verbindung mit $\psi=0$, die Werthe von x, y, z, welche $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ machen.

Differentiirt man die Gleichung $\psi=0$ zweimal, so geben die Gleichungen

$$7)\quad \begin{array}{l} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial y}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial z}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y.\partial z}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \end{array}$$

diejenigen Ableitungen der 2ten Ordnung von V, welche im (§. 25.) für die aus (4. 5. 6.) gefundenen constanten Werthe von x, y und z durch A, B, C, D, E, F, bezeichnet worden sind, und welche nach (§. 25.) die Bedingungen der Existenz des Maximums oder des Minimums von V liefern. — Diese Gleichungen (7.) vereinfachen sich aber sehr, wenn man alle mit $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ behafteten Glieder derselben, da solche für diese constanten Werthe von x, y, z, Null werden, sogleich

wegläßt, dagegen nicht diejenigen, welche mit $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, etc. etc. behaftet sind.

Anmerkung. Für Anfänger bemerken wir auch noch, daß man die Gleichungen (7.) aus den Gleichungen (1—3.) ableitet, indem man solche noch nach x, nach y oder nach z differentiirt; daß aber statt der Gleichungen (1—3.) nicht diese andern (4—6) genommen werden können, obgleich hier $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}=0$ ist, und sich also die erstern auf die letztern reducirt haben. Die letztern (4—6.) nehmlich gelten nicht mehr für jeden Werth von x, von y oder von z, sondern nur für diese aus $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, $\frac{\partial V}{\partial z}=0$, gezogenen constanten Werthe von x, y, z; daher an ein Differentiiren dieser letztern Gleichungen (4—6.) nicht mehr zu denken ist.

§. 31. Aufgabe.

Es ist gegeben z als eine Funktion von x und y durch die Gleichung $\varphi(x, y, z)=0$; und die Werthe von x und y (und dann auch von z) zu suchen, welche $V=f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche sich ergeben, wenn für x und y beliebig und von einander ganz unabhängig gedachte nächst größere und nächst kleinere Werthe x_n und y_n gesetzt werden.

Auflösung. Man löse die Gleichung $\varphi=0$ nach z auf und setze den Werth in x und y statt z in V, so wird V eine bloß unmittelbare Funktion von x und y, auf welche dann die Auflösung des (§. 16.) für denselben Fall ohne weiters kann angewandt werden.

§. 32. Zusatz 1.

Will man aber der Auflösung der Gleichung $\varphi=0$ nach z, aus irgend einem Grunde überhoben seyn, so kann man das Verfahren des (§. 16.) schon eintreten lassen, indem man

$$1)\ \frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=0,$$

$$2)\ \frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=0,$$

$$3)\ \frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}=0;$$

und da diese Gleichungen, wenn man $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}=0$ nimmt, unter der Voraussetzung daß $\frac{\partial\psi}{\partial V}$ nicht ∞ ist, sich auf

$$4)\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\qquad 5)\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\ \text{und}\ 6)\ \frac{\partial\psi}{\partial z}=0$$

zurückziehen, so geben diese letztern Gleichungen in Verbindung mit $\psi=0$, die Werthe von x, y, z, welche $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ machen.

Differentiirt man die Gleichung $\psi=0$ zweimal, so geben die Gleichungen

$$7)\ \begin{matrix}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0, & \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial y}=0, & \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial z}=0, & \frac{\partial^2\psi}{\partial y.\partial z}=0, & \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0\end{matrix}$$

diejenigen Ableitungen der 2ten Ordnung von V, welche im (§. 25.) für die aus (4. 5. 6.) gefundenen constanten Werthe von x, y und z durch A, B, C, D, E, F, bezeichnet worden sind, und welche nach (§. 25.) die Bedingungen der Existenz des Maximums oder des Minimums von V liefern. — Diese Gleichungen (7.) vereinfachen sich aber sehr, wenn man alle mit $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ behafteten Glieder derselben, da solche für diese constanten Werthe von x, y, z, Null werden, sogleich

$$8)\ \frac{\partial.(V+\lambda\varphi)}{\partial x}=0,\quad 9)\ \frac{\partial.(V+\lambda\varphi)}{\partial y}=0$$

und $$10)\ \frac{\partial.(V+\lambda\varphi)}{\partial z}=0,$$

indem man λ als nach x, nach y und nach z constant ansieht. Und wenn man aus diesen Gleichungen λ eliminirt, so geben sie in Verbindung mit $\varphi=0$, die gesuchten Werthe für x, y und z, während dann auch λ constant und bestimmt gefunden werden kann, wenn dessen Werth gewünscht werden sollte.

Daraus bildet sich aber für diesen Fall wiederum die sogenannte Methode der Multiplikatoren, welche in der praktischen Regel besteht: „Man multiplicire $\varphi=0$ mit „einem unbestimmten und constanten Faktor λ und addire „das Produkt $\lambda\varphi=0$ zu der gegebenen Funktion V, und „suche nun die Werthe von x, y, z, welche $V+\lambda.\varphi$ zu „einem Maximum oder Minimum machen, in der Beziehung „des (§. 25.), indem man x, y und z als von einander ganz „unabhängig sich denkt."

Es muß aber hier wiederholt werden, was wir (§. §. 22. 23.) über dieselbe Methode in einem einfachern Falle bereits gesagt haben, nehmlich 1) daß diese Unabhängigkeit des x, y und z nur eine fingirte ist und keine reelle, die aber der vorstehenden Theorie zu Folge richtige Resultate liefert, sobald es nur darauf ankommt, die Werthe von x und y zu bestimmen, welche $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ zu Null machen; 2) daß dieses Verfahren nur mit besonderer Rücksicht auf die Theorie dürfte angewandt werden, wenn man $\frac{\partial V}{\partial x}$ oder $\frac{\partial V}{\partial y}$ oder beide $=\infty$ haben wollte, wie dies nach (§. 16.) nothwendig wird, sobald man kein Maximum oder Minimum zu vernachlässigen gesonnen ist; endlich 3) daß diese fingirte Unabhängigkeit des z von x und y zu unrichtigen Resultaten füh-

ren würde, wenn man diese Fiktion bei der Bestimmung der 2ten Ableitungen, durch welche das Maximum von dem Minimo unterschieden wird, beibehalten wollte. — Dagegen mag es bequemer seyn, da, λ mag bedeuten was es will, doch immer $V = V + \lambda\varphi$ seyn muß (wegen $\varphi = 0$), in den zweiten Ableitungen von V, lieber $V + \lambda\varphi$ statt V zu setzen und dem λ den oben aus (5—7.) erhaltenen Werth zu geben, dabei aber überall z als die durch $\varphi = 0$ gegebene Funktion von x und y anzusehen, in so ferne dann in

$$\frac{\partial^2.(V+\lambda\varphi)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2.(V+\lambda\varphi)}{\partial x.\partial y},\quad \frac{\partial^2.(V+\lambda\varphi)}{\partial y^2},$$

welche statt der

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

des (§. 16.) zu stehen kommen, die mit den zweiten Ableitungen von z nach x und nach y, behafteten Glieder, vermöge der Gleichungen (5—7.) sogleich wegfallen, und deshalb diese zweiten Ableitungen von z, aus $\varphi = 0$ nicht noch besonders gefunden und eliminirt werden dürfen.

§. 33. Zusatz 2.

Statt die (§. 16.) gefundene Auflösung hier anzuwenden, konnte man auch die Aufgabe des (§. 31.) gleich direkt so behandeln. — Es soll nehmlich V ein Maximum oder Minimum werden in Bezug auf $V_{,,} = f(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})$ unter der Voraussetzung daß $z_{,,}$ durch $y_{,,}$ und $x_{,,}$ mittelst der Gleichung $\varphi(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}) = 0$ gegeben ist. — Man hat also

$$1)\quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}.\delta z.$$

$$2)\quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}.\delta x.\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial z}.\delta x.\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial z}.\delta y.\delta z + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.\delta z^2 + \frac{\partial V}{\partial x}.\delta^2 x +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z}.\delta^2 z,$$

wo, wenn man will, $\partial^2 x = \partial^2 y = 0$ genommen werden kann, während aber $\partial^2 z$ nicht Null, sondern so wie ∂z selbst durch die Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ oder vielmehr $\varphi(x_n, y_n, z_n) = 0$ in ∂x, ∂y, gegeben ist. Diese Gleichung $\varphi = 0$ liefert nehmlich $\partial \varphi = 0$ und $\partial^2 \varphi = 0$, d. h.

$$3)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} . \partial x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} . \partial y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} . \partial z = 0$$

$$4)\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} . \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial y} . \partial x . \partial y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} . \partial y^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial z} . \partial x . \partial z +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y . \partial z} . \partial y . \partial z + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} . \partial z^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} . \partial^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} . \partial^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} . \partial^2 z = 0.$$

Eliminirt man aus (1. u. 3.) ∂z, so erhält man (nach E. §. 1.)

$$\partial V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) . \partial x + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) . \partial y$$

unter der Voraussetzung, daß λ bestimmt ist durch die Gleichung

$$5)\quad \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Setzt man nun nach (§. 6.) $\partial V = 0$, so erhält man, da ∂x und ∂y ganz willkührlich und von einander unabhängig sind:

$$6)\quad \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad \text{und}$$

$$7)\quad \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

welche also in Verbindung mit (5.) und mit $\varphi = 0$, die Werthe für x, y, (und z) und λ liefern.

Dieselben Gleichungen (5—7.) erhält man aber, wenn man

$$8)\quad \frac{\partial . (V + \lambda . \varphi)}{\partial z} = 0, \frac{\partial . (V + \lambda . \varphi)}{\partial y} = 0 \text{ und } \frac{\partial . (V + \lambda . \varphi)}{\partial x} = 0$$

nimmt, also eben so verfährt, wie wenn $V + \lambda . \varphi$ ein Maximum oder Minimum werden sollte, unter der Voraussetzung, daß x, y und z von einander ganz unabhängig wären, worin eben die oben erwähnte „Methode der Multiplicatoren" besteht.

Statt nun aus (2. und 4.) das $\partial^2 z$ zu eliminiren (wo man $\partial^2 x = \partial^2 y = 0$ setzen kann) um $\partial^2 V$ bloß in x und y und ∂x und ∂y allein ausgedrückt zu erhalten, benutze man die Gleichungen (2. und 4.) gar nicht, sondern denke sich in (2.) $V + \lambda . \varphi$ statt V geschrieben (in so ferne $V = V + \lambda . \varphi$ ist), so fallen die mit $\partial^2 z$, $\partial^2 y$ und $\partial^2 x$ behafteten Glieder von selbst weg (vermöge der Gleichungen (5—7.)), so daß die Gleichung (4.) zur Elimination von $\partial^2 z$ nun gar nicht mehr nöthig ist, und aus diesem $\partial^2(V + \lambda . \varphi)$ nur noch ∂z mittelst der Gleichung (3.) eliminirt werden darf, um, nachdem man fur x, y, z, λ die aus den Gleichungen (5—7.) und $\varphi = 0$ gezogenen constanten Werthe gesetzt hat,

$$\partial^2 V = \partial^2 . (V + \lambda . \varphi) \qquad \text{von der Form}$$

$$A . \partial x^2 + 2B . \partial x . \partial y + C . \partial y^2$$

gefunden zu haben, und so nun nach (E. §. §. 3. 4.) die Bedingungen angeben zu können, unter denen $\partial^2 V$ für jeden reellen Werth von ∂x und ∂y beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, V selbst also ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ werden muß.

Anmerkung. Man konnte sich auch sogleich verschaffen

$$\partial^2 V = \partial^2(V + \lambda . \varphi) = \frac{\partial^2(V + \lambda . \varphi)}{\partial x^2} . \partial x^2 + 2 . \frac{\partial^2(V + \lambda . \varphi)}{\partial x . \partial y} . \partial x . \partial y + $$
$$+ \frac{\partial^2(V + \lambda . \varphi)}{\partial y^2} . \partial y^2$$

der Ansicht des (§. 31.) selbst folgend und überall z als eine durch $\varphi = 0$ gegebene Funktion von x und y sich denkend, indem man dabei entweder $\partial^2 x = \partial^2 y = 0$ nimmt, oder die mit $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ behafteten Glieder vermöge der Gleichungen (5—7.) verschwinden läßt. Dann fallen auch aus den Coefficienten von ∂x^2, $\partial x . \partial y$ und ∂y^2, die mit $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ behafteten Glieder (vermöge derselben Gleichungen 5—7.) von selbst weg, so daß auch bloß noch $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ zu eliminiren seyn wird, welche gegeben sind durch die Gleichungen $\frac{\partial . \varphi}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial . \varphi}{\partial y} = 0$.

§. 34. Zusatz 3.

Verschieden von der Aufgabe (§. §. 31—33.) obgleich im Kalkul mit dem (§. 33.) geführten höchst übereinstimmend ist die Aufgabe, wo $V = f(x, y, z)$ ein Maximum oder Minimum werden soll, in Bezug auf alle nächst größern und nächst kleinern Werthe von x, y und z, welche einer gegebenen Funktion $\varphi(x, y, z)$ unverändert denselben aber nicht gegebenen, Werth lassen.

Hier ist wiederum wie im (§. 24.) nicht $\varphi = 0$ aber $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, u. s. w. f., daher die Rechnung ganz genau so, wie in dem vorhergehenden (§. 33.) nur mit dem Unterschiede, daß die beiden entstehenden Gleichungen zur Bestimmung von x, y, z, nur allein dienen, in so ferne $\varphi = 0$ hier nicht mit statt findet. Die Gleichungen welche $\delta V = 0$ machen, bestimmen daher auch hier nur y und z in x und lassen x völlig unbestimmt.

Auch die Rechnung wodurch das Maximum vom Minimo unterschieden wird, bleibt hier wie im (§. 33.) unverändert dieselbe, nur daß man nicht $V + \lambda\varphi = V$, aber wohl $\delta^2 V + \lambda . \delta^2\varphi = \delta^2 V$ nehmen kann.

§. 35. Aufgabe.

Es sind y und z Funktionen von x, gegeben durch die Gleichungen

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Man soll den Werth von x (und dann auch die Werthe für y und z) finden, welcher $V = f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche sich ergeben, wenn man statt alles x die nächst größern und nächst kleinern Werthe $x_{,,}$, oder hier bloß $x + \varkappa . \delta x$ setzt, so daß alle diese Nachbar-Werthe durch

$$V_{,,} = f(x + \varkappa . \delta x, \; y_{x+\varkappa . \delta x}, \; z_{x+\varkappa . \delta x}),$$

$x+\varkappa.\partial x$ als Werthe von x gedacht (E. §. 34.), ausgedrückt werden können, oder noch allgemeiner durch

$V_\varkappa = f(x_\varkappa, y_{(x_\varkappa)}, z_{(x_\varkappa)})$, wo $x_\varkappa$ ein Werth von x ist.

Auflösung. Aus den beiden gegebenen Gleichungen $\varphi=0$ und $\varphi_1=0$, finde man y und z in x ausgedrückt, substituire diese Werthe statt y und z in V, so reducirt sich V auf eine bloß unmittelbare Funktion von x, auf welche die Auflösung des (§. 10.) ohne weiters angewandt werden kann.

§. 36. Zusatz 1.

Wendet man das (§. 10.) gefundene Resultat hier an, den Ausnahmsfall übergehend, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0, \text{ d. h.}$$

$$1)\ \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

während $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ gegeben sind, durch die Gleichungen $\partial\varphi=0$ und $\partial\varphi_1=0$, d. h. durch

$$2)\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$3)\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (1—3.) $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$, mittelst der Methode des (E. §. 1.), so erhält man:

$$4)\ \frac{\partial V}{\partial x}+\lambda.\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\lambda_1.\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda\varphi+\lambda_1\varphi_1)}{\partial x}=0$$

wenn λ und λ_1 bestimmt sind durch die Gleichungen

$$5)\ \frac{\partial V}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\lambda_1.\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda\varphi+\lambda_1\varphi_1)}{\partial y}=0$$

und

$$6)\ \frac{\partial V}{\partial z}+\lambda.\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\lambda_1.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda\varphi+\lambda_1\varphi_1)}{\partial z}=0,$$

indem λ und λ_1 als nach x, y und z constant angesehen werden. Eliminirt man also aus (4—6.) die unbestimmten Ausdrücke λ und λ_1, so erhält man eine Eliminations-Gleichung, welche in Verbindung mit $\varphi=0$ und $\varphi_1=0$, sowohl x, als auch y und z so liefern, daß $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ oder $\delta V=0$ wird.

Man kann daher auch hier wieder die in den (§. §. 22. 23. 31 — 33.) angeführte Methode der Multiplikatoren auf eine analoge Weise anwenden, d. h. die gegebenen Gleichungen $\varphi=0$ und $\varphi_1=0$ beziehlich mit unbestimmten Constanten λ und λ_1 multipliciren, zu der gegebenen Funktion V addiren, und nun $V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1$ als die gegebene Funktion ansehen, welche unter der Voraussetzung ein Maximum oder Minimum werden soll, daß man x, y und z als von einander ganz unabhängig, und von einander unabhängig variabel ansieht (unter der Voraussetzung ferner, daß man die Ausnahmsfälle, wo die erste Variation $=\infty$ wird, unberücksichtigt lassen will.).

Diese fingirte Unabhängigkeit des x, y und z von einander darf jedoch nicht länger beibehalten werden, sobald man zu $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ übergeht, durch welches, wenn es $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, das $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ entschieden wird. Doch mag es auch vielleicht hier bequemer seyn, in so ferne $V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1=V$ ist, in dieser Untersuchung lieber $\frac{\partial^2.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial x^2}$ statt $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ zu schreiben, weil dann die Gleichungen (4—6.) angewandt und die Resultate dadurch etwas vereinfacht werden können.

§. 37. Zusatz 2.

Wir haben hier das Resultat des (§. 10.) nur in Anwendung gebracht. Wollte man aber die Aufgabe dem vorhergehenden (§. 36.) analog, jedoch direkt durchführen, so hätte man die Nachbar-Werthe

$$V_{,,}=f(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}),$$

aber mit der Einschränkung, daß $y_{,,}$ und $z_{,,}$, also namentlich δy, δz, etc. nicht willkührlich, sondern von $x_{,,}$, also von δx, etc., noch abhängig sind, durch die Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, oder vielmehr $\varphi(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})=0$ und $\varphi_1(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})=0$.

Folglich wäre dann:

$$1)\quad \delta V=\frac{\partial V}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}.\delta z,$$

während δy und δz in δx gegeben sind, durch die Gleichungen $\delta\varphi=0$ und $\delta\varphi_1=0$, d. h. durch

$$2)\quad 0=\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\delta z \qquad \text{und}$$

$$3)\quad 0=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}.\delta z.$$

Setzt man nun $\delta V=0$ (nach §. 6.), und eliminirt man δy und δz mittelst der Gleichungen (2. u. 3.), so erhält man die Gleichungen

$$4)\quad \frac{\partial V}{\partial x}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial x}=0$$

$$5)\quad \frac{\partial V}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\lambda_1.\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial y}=0$$

und

$$6)\quad \frac{\partial V}{\partial z}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\lambda_1.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial z}=0,$$

genau wie im vorhergehenden (§. 36.).

Um nun das Maximum vom Minimo zu unterscheiden, muß man $\delta^2 V$ ausdrücken in δx, δy, δz, $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, (wo zwar $\delta^2 x=0$ angenommen werden kann, aber nicht

$\partial^2 y$ und $\partial^2 z$, welche auf eine bestimmte Weise von ∂x abhängen und nicht Null werden, sondern durch die Gleichungen $\partial^2\varphi=0$ und $\partial^2\varphi_1=0$ gegeben sind), und muß dann ∂y und ∂z durch die Gleichungen $\partial\varphi=0$ und $\partial\varphi_1=0$, so wie $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ mittelst der Gleichungen $\partial^2\varphi=0$ und $\partial^2\varphi_1=0$ eliminiren, und so $\partial^2 V=$ auf die Form $A.\partial x^2$ bringen. — Es ist aber viel bequemer, sogleich

$V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1$ statt V zu setzen, weil dann in $\partial^2.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)$ die Coefficienten von $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, vermöge der Gleichungen (4—6.) Null sind, diese Glieder also von selbst wegfallen. Es bleibt dann nur ∂y, ∂z mittelst der Gleichungen (2. und 3.) zu eliminiren, so wie für x, y, z, λ und λ_1 die aus (4—6.) in Verbindung mit $\varphi=0$ und $\varphi_1=0$ zu findenden Werthe zu setzen, um dann $\partial^2.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)$ oder $\partial^2 V$ sogleich auf die Form $A.\partial x^2$ gebracht zu haben.

Anmerkung. Man konnte auch sogleich im Geiste des (§. 34.)

$$\partial^2 V=\partial^2(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)=\frac{\partial^2.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial x^2}.\partial x^2$$

nehmen, indem man entweder $\partial^2 x=0$ setzt, oder das mit $\partial^2 x$ behaftete Glied mittelst der Gleichungen (4—6.) verschwinden läßt. Dann würden aber auch aus dem entwickelten $\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial x^2}$ die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ behafteten Glieder wegen der Gleichungen (4—6.) von selbst weggefallen seyn, und man hätte nur $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus den Gleichungen $\varphi=0$ und $\varphi_1=0$ zu finden gehabt und sie in den ebengenannten Ausdruck zu setzen, um sogleich $\partial^2 V$ auf die Form $A.\partial x^2$ gebracht zu sehen.

§. 38. Zusatz 3.

Verschieden von der letzterwähnten Aufgabe, jedoch im Kalkul beinahe mit (§. 37.) zusammenfallend, ist die Aufgabe wo $V=f(x, y, z)$ ein Maximum oder Minimum werden soll, in Bezug auf alle nächst größern und nächst kleinern

§. 40. Zusatz 1.

Wird bloß $\partial V = 0$ d. h. bloß

1) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial u} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial w} = 0$, etc. etc.

genommen, so hängt die Untersuchung, ob das Maximum oder das Minimum wirklich statt finde, in der Regel vom Coefficienten von $\dfrac{\varkappa^2}{2!}$, der Entwicklung der Nachbar-Werthe $V_\varkappa$ ab, welcher, wenn man die zweiten Ableitungen von V nach Art des (§. 25.) geordnet, für die aus den Gleichungen (1.) gefundenen constanten Werthe von x, y, z, u, w, etc. durch A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, etc. etc. bezeichnet, im Allgemeinen von der Form seyn wird

$$A.\partial x^2 + 2B.\partial x.\partial y + C.\partial y^2 + 2D.\partial x.\partial z + 2E.\partial y.\partial z + F.\partial z^2$$
$$+ 2G.\partial x.\partial u + 2H.\partial y.\partial u + 2J.\partial z.\partial u + K.\partial u^2 + 2L.\partial x.\partial w + \text{etc.}$$

so daß nach (E. §. §. 3. 8. 15. 22.) leicht die Bedingungen angegeben werden können, unter denen er für jeden reellen Werth von ∂x, ∂y, ∂z, ∂u, ∂w, etc. beständig $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, V selbst also ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$ seyn wird.

§. 41. Zusatz 2.

Ist V nicht entwickelt sondern verwickelt durch die Gleichung $\psi(x, y, z, u, w, \text{etc. etc. } V) = 0$ gegeben, so findet man $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V}{\partial y}$, $\dfrac{\partial V}{\partial z}$, etc. etc. durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0,\ \text{etc. etc.},$$

welche sich für

1) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial u} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial w} = 0$, etc.

auf

$$2)\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial u}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial w}=0,\ \text{etc.}$$

reduciren, wenn nicht $\frac{\partial\psi}{\partial V}=\infty$ gedacht ist.

Für dieselben Werthe von x, y, z, u, v, w, etc., welche den Gleichungen (1.) genügen, und aus den Gleichungen (2.) gefunden werden, reduciren sich die Gleichungen

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial y}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y.\partial z}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0,\ \text{etc.},$$

durch welche die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, etc. bestimmt werden sollen, bloß auf

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial z}=0, \qquad \text{u. s. w. f.};$$

woraus sich dann für die Werthe von x, y, z, u, w, etc., welche den Gleichungen (1.) genügen, die im vorigen (§. 40.) durch A, B, C, etc. etc. etc. bezeichneten Werthe ergeben.

§. 42. Zusatz 3.

Enthält die (§. 39.) gegebene Funktion

$$V=f(x, y, z, u, w, \text{etc. etc.})$$

die m Veränderlichen x, y, z, u, w, etc. etc., und sind diese nicht alle von einander unabhängig, sondern hat man zwischen ihnen noch eine Anzahl μ von Gleichungen

$$\varphi=0,\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ \text{etc. etc.}\ \varphi_{\mu-1}=0,$$

so kann man μ der Veränderlichen, mittelst dieser Gleichungen

aus V wegschaffen, so daß V eine bloß unmittelbare Funktion der $m-\mu$ übrigen (absolut) Veränderlichen wird, und der Lehrsatz (§. 39.) findet dann sogleich die Werthe dieser übrigen absolut Veränderlichen, und die Bedingungen, unter denen V in Bezug auf die, zu den von einander ganz unabhängig gedachten nächst größern und nächst kleinern Werthen dieser absolut Veränderlichen, gehörigen Nachbar-Werthe von V, ein Maximum oder ein Minimum wird.

Berücksichtigt man aber die Ausnahmsfälle nicht, in denen eine oder mehrere der Ableitungen von V nach den absolut Veränderlichen genommen $=\infty$ wird, so findet man die nöthigen Gleichungen mittelst der „Methode der Multiplikatoren", indem man

$$V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\lambda_2.\varphi_2+\ldots.+\lambda_{\mu-1}.\varphi_{\mu-1}$$

statt V setzt, und nun die Ableitungen davon nach allen vorkommenden Veränderlichen, alle als von einander ganz unabhängig betrachtet, einzeln $=0$ nimmt, aus den m entstehenden Gleichungen die μ unbestimmten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\mu-1}$ eliminirt, und aus den $m-\mu$ übrig bleibenden Gleichungen in Verbindung mit den μ Gleichungen

$$\varphi=0, \varphi_1=0, \ldots \varphi_{\mu-1}=0$$

die Werthe aller m in V vorkommenden Veränderlichen bestimmt.

Die zum Behuf des bequemern Ausdrucks dieser praktischen Regel (Methode der Multiplikatoren) fingirte Unabhängigkeit der m Veränderlichen von einander, darf jedoch nicht auf die Ableitungen der zweiten Ordnung erstreckt werden, wenn es auch vielleicht bequemer ist, auch hier überall statt V den gleichen Ausdruck

$$V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\lambda_2.\varphi_2+\ldots+\lambda_{\mu-1}.\varphi_{\mu-1}$$

zu setzen, in so ferne dann wenigstens die Gleichungen

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2.\varphi}{\partial y^2}=0$, etc. etc. etc. oder die Gleichungen

$\delta^2\varphi = 0$, $\delta^2\varphi_1 = 0$, etc. etc., welche zur Bestimmung der zweiten Ableitungen aller abhängig Veränderlichen, oder der zweiten Variationen derselben (die nicht $= 0$ gesetzt werden dürfen) dienen müssen, nicht in Betrachtung gezogen zu werden brauchen, weil jene zweiten Ableitungen oder zweiten Variationen dann von selbst wegfallen; wenn nur immer die Abhängigkeit der μ Veränderlichen, welche durch die Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, ... $\varphi_{\mu-1} = 0$ gegeben ist, gehörig berücksichtigt und gewürdigt wird. (Vergl. §. §. 20—23. 31—33. 35—37.).

§. 43. Zusatz 4.

Verschieden vom (§. 42.) wäre jedoch die Aufgabe, wenn V (§. 39.) ein Maximum oder Minimum werden sollte, in Bezug auf alle nächst größern oder nächst kleinern Werthe von x, y, z, etc. etc. etc., welche von den Funktionen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{\mu-1}$ des (§. 42.), nur einige oder gar keine zu Null machen, dagegen allen unverändert denselben, immer, oder doch zum Theil, nicht gegebenen Werth lassen sollen.

Die Rechnung würde ganz genau dieselbe bleiben, wie im (§. 42.), weil man hier wie dort $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta^2\varphi_1 = 0$, etc., etc. etc. etc., hat, so daß wenn auch hier nicht

$$V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1 + \ldots + \lambda_{\mu-1} . \varphi_{\mu-1} = V \quad \text{seyn kann,}$$

doch $\delta V + \lambda . \delta\varphi + \lambda_1 . \delta\varphi_1 + \ldots + \lambda_{\mu-1} . \delta\varphi_{\mu-1} = \delta V$

und $\delta^2 V + \lambda . \delta^2\varphi + \lambda_1 . \delta^2\varphi_1 + \ldots + \lambda_{\mu-1} . \delta^2\varphi_{\mu-1} = \delta^2 V$

hier eben so gut seyn muß, wie dort (§. 42.).

Der Unterschied in den Resultaten wird nur darin bestehen, daß hier zuletzt zur Bestimmung der Werthe von x, y, z, etc. etc. nicht noch alle μ Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, ... $\varphi_{\mu-1} = 0$, zur Bestimmung mithelfen werden, weil sie hier nicht alle statt finden, eine Anzahl dieser Veränderlichen x, y, z, etc. daher

völlig unbestimmt bleiben wird. (Vergl. sorgfältig §. §. 24. 34. und 38.).

Anmerkung. Wir haben uns bis jetzt nur mit solchen Aufgaben beschäftigt, in welchen bloß Urfunktionen (d. h. solche, die weder Differential- noch Integral-Ausdrücke enthalten) vorkommen, und wir haben absichtlich gerade in diesem einfachsten Falle, jede Aufgabe aus mehren verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet, weil dies dazu dienen kann, das wahre Wesen der Variations-Rechnung und ihrer Anwendung auf die Lehre vom Maximum und Minimum noch bestimmter aufzufassen. — Eben deshalb werden wir nun bei den folgenden Aufgaben, in den bisher betrachteten Beziehungen, uns kürzer fassen können, indem wir nur noch ein für allemal bemerken, daß eine ähnliche Mehrseitigkeit der Ansicht und der Entwicklung auch bei vielen der folgenden Aufgaben statt findet, wenn wir auch nicht bei jeder derselben solche noch besonders in's Detail verfolgen sollten. — Um sich in den bisher betrachteten Aufgaben fester zu setzen, und in ihrer Auflösung Gewandtheit zu verschaffen, kann man sich, bis die hiezu gehörige Beispielsammlung erschienen seyn wird, am besten der „Uebungs-Aufgaben zur Lehre vom „Größten und Kleinsten" von Dr. Lehmus. Berlin 1823. bedienen.

Betrachten wir daher nun zunächst solche Aufgaben, in welche Differential-Ausdrücke eingehen.

§. 44. Aufgabe.

Es ist $V = f(x, y, y_1)$, y eine noch unbestimmte Funktion von x und y_1 ihre Ableitung nach x, nehmlich $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder ∂y (E. §. 36.). Man soll diejenige Funktion von x finden, welche statt y gesetzt, V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf alle Nachbar-Werthe von V, die sich ergeben, wenn für y die nächst größere oder nächst kleinere *) Funktion $y_{\varkappa}$ oder $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \text{etc.}$ ge-

*) Für jeden bestimmten Werth von x nehmlich hat y ebenfalls einen bestimmten und constanten Werth, und $y_{\varkappa}$ liefert dann für denselben bestimmten Werth von x allemal einen nächst größern und einen nächst kleinern Werth von y, in so ferne $\varkappa$ bald positiv, bald negativ, übrigens aber, wie immer, im Moment des Verschwindens gedacht wird.

setzt wird, wo δy, $\delta^2 y$, etc. wie y selbst, als Funktionen von x gedacht werden.

Auflösung. Die Nachbar-Werthe von $V = f(x, y, \partial y)$ sind hier offenbar $V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, \partial(y_\varkappa))$, oder weil $\partial(y_\varkappa)$ ebenfalls wie $y_\varkappa$, eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihe bildet, deren erstes Glied ∂y oder y_1 ist, wenn man solche durch $(y_1)_\varkappa$ bezeichnet und y_1 als eine neue (wenn auch von y abhängige) Funktion von x ansieht, welche durch $\varkappa$ variirt und in $(y_1)_\varkappa$ oder $y_1 + \varkappa . \delta(y_1) + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2(y_1) + \text{etc.}$ übergeht, so sind dieselben Nachbar-Werthe von V durch

$V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, (y_1)_\varkappa)$ dargestellt.

Dann ist (nach B. §. 5. oder B. §. 8.):

$$1)\quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \delta(y_1),$$

$$2)\quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \delta(y_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . \delta(y_1)^2 + \\ + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \delta^2(y_1),$$

wo aber $\delta(y_1) = \delta . \partial y = \partial . \delta y$

und $\delta^2(y_1) = \delta^2 . \partial y = \partial . \delta^2 y$ ist (B. §. 6.); so daß

$$3)\quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \partial \delta y,$$

$$4)\quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \partial \delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2 + \\ + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \partial \delta^2 y.$$

Setzt man nun nach (§. 6.):

$$\text{I.}\quad \delta V = 0,$$

so zerfällt diese Gleichung nach (E. §. 85.) in:

$$5)\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad 6)\quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0;$$

welche im Allgemeinen zwei Differential-Gleichungen der ersten Ordnung sind (in so ferne sie y und $y_1 = \partial y$ enthalten);

und jede Funktion y, welche unserer Aufgabe genügt, muß nothwendig diesen beiden Gleichungen genügen. Umgekehrt muß man nun trachten, diejenige Funktion y von x zu finden, welche den beiden Gleichungen (5. und 6.) genügt, um diejenige zu haben, welche δV unabhängig von δy zu Null macht.

Wenn aber jede Funktion y von x, welche den Gleichungen (5. und 6.) genügt, auch derjenigen Gleichung genügen muß, welche aus (5. und 6.) durch Elimination von y_1 oder ∂y hervorgeht, und die wir hier durch

7) $\pi(x, y)=0$ bezeichnen wollen, so darf man doch nicht umgekehrt schließen, daß jede aus (7.) für y gefundene Funktion von x nothwendig auch den Gleichungen (5. und 6.) genügen müsse, und daher diejenige sey, welche $\delta V=0$ mache. Wenn dagegen die aus der Gleichung (7.) für y gefundene Funktion von x, auch noch einer der beiden Gleichungen (5. oder 6.) genügt, so muß sie nothwendig auch der andern genügen, und genügt solche der einen dieser Gleichungen (5. und 6.) nicht, so kann sie auch nicht der andern genügen.

Nachdem man daher aus (5. und 6.) y_1 eliminirt, und dadurch die Gleichung (7.) erhalten hat, so sehe man zu, ob die aus (7.) für y sich ergebende Funktion von x auch noch der Gleichung (5.) oder der Gleichung (6.) genüge. Genügt keine der aus (7.) für y gefundenen Funktionen von x z. B. der Gleichung (5.), so ist eine Funktion, wie sie gesucht wird, unmöglich zu finden, weil eine solche nicht existirt. Genügt aber die aus (7.) für y gefundene Funktion von x, z. B. noch der Gleichung (5.), so ist sie diejenige, die nothwendig auch der Gleichung (6.) genügt und daher $\delta V=0$ macht, und es hängt nun die fernere Untersuchung, ob solche Funktion y auch V wirklich zu einem Maximum oder Minimum machen, und welches von beiden statt finden werde, von $\delta^2 V$ ab (§. §. 7. 8.), welches sich wegen (5. u. 6.) auf

$$8)\ \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2.\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_1}.\delta y.\partial\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}.(\partial\delta y)^2$$

reducirt. — Da aber δy und $\partial\delta y$ zwar der Form nach von einander abhängen, aber nicht dem Werthe nach, in so ferne der Werth von δy und dann auch der von $\partial\delta y$ von den in δy beliebig gedachten Constanten abhängt, und für jeden gegebenen Werth von x noch ganz willkührlich gedacht werden kann, so wird dieses $\delta^2 V$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn, daher V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ und zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} > \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_1}\right)^2$ ist (E. §. 3.); wo man aber nicht übersehen darf, daß $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_1}$ noch Funktionen von x sind, und daher für gewisse stetig auf einander folgende Werthe von x, der Bedingung des Maximums, für eine andere ähnliche Werthen-Reihe von x dagegen, der Bedingung des Minimums, und für eine dritte ähnliche Reihe der Werthe von x, weder dem einen noch dem andern entsprechen können.

Da endlich nach (§. 6.) auch noch $\delta V = \infty$ gesetzt werden muß, so erhält man noch die Systeme der Gleichungen

$$9)\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = \infty,$$

$$10)\ \frac{\partial V}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0,$$

$$11)\ \frac{\partial V}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = \infty,$$

welche alle noch Werthe für y (in x) liefern können, die der angegebenen Bedingung des Maximums oder Minimums genügen und für welche das Verfahren des (§. 7.) noch in Anwendung gebracht werden muß, um das Maximum vom Minimo zu unterscheiden. (Vergl. §. 16.).

Beispiel. Eine Curve zu finden, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, daß eine von der jedesmaligen Tangente an diesem Punkte abhängige Linie, oder Fläche, etc. ein Maximum oder Minimum werde, in Bezug auf alle nächstangrenzenden Curven.

Anmerk. Uebrigens kann hier nochmals bemerklich gemacht werden, warum in $y_\varkappa$ oder $y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+$ etc. etc., welches die für jeden Werth von x, dem y nächst größern und nächst kleinern Werthe vorstellt, die Coefficienten δy, $\delta^2 y$, etc. im Allgemeinen (und hier namentlich) als Funktionen von x angesehen werden müssen. Hätte man nehmlich δy, $\delta^2 y$ etc. als nach x constant gedacht, so hätte $y_\varkappa$ zwar noch immer nächstangrenzende Werthe von y bezeichnet, aber $\partial(y_\varkappa)$ hätte sich dann bloß auf ∂y reducirt, weil die Ableitungen aller der übrigen, nach x constanten Glieder von $y_\varkappa$, $=0$ geworden seyn würden. Dies hätte also dem besondern Falle entsprochen, daß ∂y auch bei jedem geänderten Zustand von y ungeändert bleiben soll, was hier gar nicht vorausgesetzt war.

§. 45. Zusatz 1.

Sollte aber ausdrücklich V zu einem Maximum oder Minimum werden, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche entstehen, wenn $y_\varkappa$ statt y gesetzt, dieses $y_\varkappa$ aber so gedacht wird, daß der Werth für ∂y unverändert derselbe bleibt; so würde sich, da nun $\delta.\partial y=\partial\delta y=0$ ist, die Gleichung $\delta V=0$ auf $\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y=0$, und in so ferne δy noch immer willkührlich gedacht ist, auch auf

$$\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

reduciren, welche Gleichung integrirt, y in x mit einer willkührlichen Constante liefert, die noch einer zweiten Bedingung genügen kann, etwa der, daß y für einen gegebenen Werth α von x, ebenfalls einen gegebenen Werth β haben soll.

Eben so wird unter dieser Voraussetzung bloß

$$\delta^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2;$$

und $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ zeigt also an, daß V in dieser Beziehung ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$ ist. (Vergl. §. 24.).

Beispiel. Dasselbe wie zu (§. 44.); nur mit der noch hinzugefügten Bedingung, daß die nächstangrenzenden Curven, in Bezug auf welche die gesuchte Curve das Maximum oder Minimum liefern soll, nicht ganz willkührlich, sondern von allen nur diejenigen genommen seyn sollen, deren zu derselben Abscisse gehörigen Tangenten alle mit einander parallel laufen.

§. 46. Zusatz 2.

Soll aber V ein Maximum oder Minimum werden, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche aus $V = f(x, y, \partial y)$ hervorgehen, wenn man für y die nächst größern und nächst kleinern Funktionen $y_{\varkappa}$, oder $y + \varkappa . \delta y + \text{etc. etc.}$ setzt, dabei δy, etc. etc. als beliebige Funktionen von x sich denkt, jedoch für jeden andern Werth von x anders und jedesmal so genommen, daß für diesen besondern Werth von x, dies δy, etc. etc. der Null gleich wird, so daß y selbst für jeden bestimmten Werth von x unverändert bleiben, und nur ∂y eine Aenderung erleiden soll; so reducirt sich für jeden bestimmten Werth von x, weil für ihn $\delta y = 0$, aber $\partial \delta y$ noch beliebig seyn soll, die Gleichung $\delta V = 0$ bloß auf $\frac{\partial V}{\partial y_1} = 0$. — Integrirt man daher diese letztere, so erhält man y in x mit einer willkührlichen Constante, welche man sich auch noch dadurch bestimmt denken kann, daß noch einer Bedingung genügt wird, etwa der, daß zu $x = \alpha$, $y = \beta$ gehören soll, wo α und β gegebene Werthe sind. Ferner wird, für jeden bestimmten Werth von x, eben weil für ihn immer $\delta y = 0$ (und auch $\delta^2 y = 0$, wenn man nicht bloß $y + \varkappa . \delta y$ statt $y_{\varkappa}$ genommen hat) gedacht wird, auch

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} \cdot (\partial \delta y)^2,$$

§. 37. Zusatz 2.

Wir haben hier das Resultat des (§. 10.) nur in Anwendung gebracht. Wollte man aber die Aufgabe dem vorhergehenden (§. 36.) analog, jedoch direkt durchführen, so hätte man die Nachbar-Werthe

$$V_{''}=f(x_{''},\ y_{''},\ z_{''}),$$

aber mit der Einschränkung, daß $y_{''}$ und $z_{''}$, also namentlich δy, δz, etc. nicht willkührlich, sondern von $x_{''}$, also von δx, etc., noch abhängig sind, durch die Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, oder vielmehr $\varphi(x_{''},\ y_{''},\ z_{''})=0$ und $\varphi_1(x_{''},\ y_{''},\ z_{''})=0$.

Folglich wäre dann:

$$1)\ \delta V=\frac{\partial V}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}.\delta z,$$

während δy und δz in δx gegeben sind, durch die Gleichungen $\delta\varphi=0$ und $\delta\varphi_1=0$, d. h. durch

$$2)\ 0=\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\delta z \quad \text{und}$$

$$3)\ 0=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}.\delta x+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}.\delta z.$$

Setzt man nun $\delta V=0$ (nach §. 6.), und eliminirt man δy und δz mittelst der Gleichungen (2. u. 3.), so erhält man die Gleichungen

$$4)\ \frac{\partial V}{\partial x}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial x}=0$$

$$5)\ \frac{\partial V}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\lambda_1.\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial y}=0$$

und

$$6)\ \frac{\partial V}{\partial z}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\lambda_1.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0 \text{ oder } \frac{\partial.(V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1)}{\partial z}=0,$$

genau wie im vorhergehenden (§. 36.).

Um nun das Maximum vom Minimo zu unterscheiden, muß man δ^2V ausdrücken in δx, δy, δz, δ^2x, δ^2y, δ^2z, (wo zwar $\delta^2x=0$ angenommen werden kann, aber nicht

$\partial^2 y$ und $\partial^2 z$, welche auf eine bestimmte Weise von ∂x abhängen und nicht Null werden, sondern durch die Gleichungen $\partial^2\varphi = 0$ und $\partial^2\varphi_1 = 0$ gegeben sind), und muß dann ∂y und ∂z durch die Gleichungen $\partial\varphi = 0$ und $\partial\varphi_1 = 0$, so wie $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ mittelst der Gleichungen $\partial^2\varphi = 0$ und $\partial^2\varphi_1 = 0$ eliminiren, und so $\partial^2 V =$ auf die Form $A . \partial x^2$ bringen. — Es ist aber viel bequemer, sogleich

$V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1$ statt V zu setzen, weil dann in $\partial^2 . (V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1)$ die Coefficienten von $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, vermöge der Gleichungen (4—6.) Null sind, diese Glieder also von selbst wegfallen. Es bleibt dann nur ∂y, ∂z mittelst der Gleichungen (2. und 3.) zu eliminiren, so wie für x, y, z, λ und λ_1 die aus (4—6.) in Verbindung mit $\varphi = 0$ und $\varphi_1 = 0$ zu findenden Werthe zu setzen, um dann $\partial^2 . (V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1)$ oder $\partial^2 V$ sogleich auf die Form $A . \partial x^2$ gebracht zu haben.

Anmerkung. Man konnte auch sogleich im Geiste des (§. 34.)

$$\partial^2 V = \partial^2(V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1) = \frac{\partial^2 . (V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1)}{\partial x^2} . \partial x^2$$

nehmen, indem man entweder $\partial^2 x = 0$ setzt, oder das mit $\partial^2 x$ behaftete Glied mittelst der Gleichungen (4—6.) verschwinden läßt. Dann würden aber auch aus dem entwickelten $\frac{\partial^2(V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1)}{\partial x^2}$ die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ behafteten Glieder wegen der Gleichungen (4—6.) von selbst weggefallen seyn, und man hätte nur $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus den Gleichungen $\varphi = 0$ und $\varphi_1 = 0$ zu finden gehabt und sie in den ebengenannten Ausdruck zu setzen, um sogleich $\partial^2 V$ auf die Form $A . \partial x^2$ gebracht zu sehen.

§. 38. Zusatz 3.

Verschieden von der letzterwähnten Aufgabe, jedoch im Kalkul beinahe mit (§. 37.) zusammenfallend, ist die Aufgabe wo $V = f(x, y, z)$ ein Maximum oder Minimum werden soll, in Bezug auf alle nächst größern und nächst kleinern

Werthe von x, y und z, welche zweien gegebenen Funktionen

$$\varphi(x, y, z) \quad \text{und} \quad \varphi_1(x, y, z)$$

unverändert dieselben Werthe lassen.

Hier ist zwar nicht $\varphi = 0$ aber doch $\partial\varphi = 0$, $\partial^2\varphi = 0$, etc. etc.; eben so zwar nicht $\varphi_1 = 0$ aber doch $\partial\varphi_1 = 0$, $\partial^2\varphi_1 = 0$, etc. etc. Es findet also für diese Aufgabe genau dieselbe Rechnung statt, wie die (§. 37.) geführte, nur mit dem Unterschiede, daß die für $\partial V = 0$ erhaltene Gleichung zwischen x, y und z die einzige ist, weil man hier nicht noch $\varphi = 0$ und $\varphi_1 = 0$ gegeben hat, gedachte Gleichung also nur z in x und y bestimmt, dabei aber x und y ganz willkührlich läßt.

Auch die Rechnung wodurch das Maximum von dem Minimo unterschieden wird, bleibt genau so wie sie (§. 37.) geführt ist, nur daß hier nicht $V + \lambda . \varphi + \lambda_1 . \varphi_1 = V$, aber doch $\partial^2 V + \lambda . \partial^2\varphi + \lambda_1 . \partial^2\varphi_1 = \partial^2 V$ genommen werden kann.

Anmerkung. Die Rechnung würde auch keine Abänderung erleiden, wenn nur die eine Funktion φ unverändert bleiben, die andere aber $\varphi_1 = 0$ werden sollte. Nur wäre dann z und auch y in x zu bestimmen, und x allein bliebe noch unbestimmt.

§. 39. Lehrsatz.

Die Werthe x, y, z, u, w, etc. welche

$$V = f(x, y, z, u, w, \text{etc. etc.})$$

zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle Nachbar-Werthe von V, die zu beliebig und von einander ganz unabhängig genommenen nächst größern und nächst kleinern Werthen von x, y, z, u, w, etc. gehören, werden gefunden, wenn man jede der Gleichungen

$$1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \infty,$$

mit jeder der Gleichungen

$$2) \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \infty,$$

und mit jeder der Gleichungen

$$3)\ \frac{\partial V}{\partial z}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial z}=\infty,$$

ferner mit jeder der Gleichungen

$$4)\ \frac{\partial V}{\partial u}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial u}=\infty,$$

und mit jeder der Gleichungen

$$5)\ \frac{\partial V}{\partial w}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial w}=\infty$$

u. s. w. in Verbindung bringt, und für jedes aus diesen Gleichungen gefundene System von Werthen von

x, y, z, u, w, etc. etc. noch untersucht, wenn

$f(x_{\varkappa}, y_{\varkappa}, z_{\varkappa}, u_{\varkappa}, w_{\varkappa}$ etc.$)$ direkt nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt, außer V selbst zum ersten Gliede dieser Entwicklung $\varkappa^{\mu}.P$ liefert, ob μ eine gerade ganze Zahl, oder eine in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl mit geradem Zähler wird, in welchem Falle dann P für jeden reellen Werth von $\delta x, \delta y, \delta z, \delta u$, etc. beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ das $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von V anzeigt.

Beweis. Man gelangt sehr leicht zu diesem Lehrsatze, wenn man ihn zuerst unter der Form einer Aufgabe giebt, und nach (§. §. 10. 16. 25.) behandelt. — Denselben kann man auch nach (§. §. 11. 17. 26. etc.) erhalten, in so ferne man nicht jeden der Ausdrücke x, y, z, w, u, etc. als constant ansieht, sondern darunter z. B. nur x, y, z, als constant und unabhängig von einander, dagegen u, w, etc. als Funktionen dieser erstern, und die Variationen demgemäß nimmt, so daß $V_{(\varkappa)}$ wiederum alle Nachbar-Werthe vorstellt; oder auch nach (§. §. 18. 28. 29.), indem beliebige der Ausdrücke x, y, z, u, w, etc., als völlig formlose (immer unbestimmt bleibende) Funktionen der übrigen betrachtet werden.

§. 40. Zusatz 1.

Wird bloß $\partial V = 0$ d. h. bloß

1) $\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \frac{\partial V}{\partial w} = 0,$ etc. etc.

genommen, so hängt die Untersuchung, ob das Maximum oder das Minimum wirklich statt finde, in der Regel vom Coefficienten von $\frac{\varkappa^2}{2!}$, der Entwicklung der Nachbar-Werthe $V_\varkappa$ ab, welcher, wenn man die zweiten Ableitungen von V nach Art des (§. 25.) geordnet, für die aus den Gleichungen (1.) gefundenen constanten Werthe von $x, y, z, u, w,$ etc. durch $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L,$ etc. etc. bezeichnet, im Allgemeinen von der Form seyn wird

$$A.\partial x^2 + 2B.\partial x.\partial y + C.\partial y^2 + 2D.\partial x.\partial z + 2E.\partial y.\partial z + F.\partial z^2$$
$$+ 2G.\partial x.\partial u + 2H.\partial y.\partial u + 2J.\partial z.\partial u + K.\partial u^2 + 2L.\partial x.\partial w + \text{etc.}$$

so daß nach (E. §. §. 3. 8. 15. 22.) leicht die Bedingungen angegeben werden können, unter denen er für jeden reellen Werth von $\partial x, \partial y, \partial z, \partial u, \partial w,$ etc. beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, V selbst also ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird.

§. 41. Zusatz 2.

Ist V nicht entwickelt sondern verwickelt durch die Gleichung $\psi(x, y, z, u, w, \text{etc. etc. } V) = 0$ gegeben, so findet man $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z},$ etc. etc. durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0, \text{ etc. etc.,}$$

welche sich für

1) $\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \frac{\partial V}{\partial w} = 0,$ etc.

auf

2) $\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial w}=0$, etc.

reduciren, wenn nicht $\frac{\partial\psi}{\partial V}=\infty$ gedacht ist.

Für dieselben Werthe von x, y, z, u, v, w, etc., welche den Gleichungen (1.) genügen, und aus den Gleichungen (2.) gefunden werden, reduciren sich die Gleichungen

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial y}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y.\partial z}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0, \text{ etc.},$$

durch welche die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, etc. bestimmt werden sollen, bloß auf

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x.\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial V}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x.\partial z}=0, \quad \text{u. s. w. f.;}$$

woraus sich dann für die Werthe von x, y, z, u, w, etc., welche den Gleichungen (1.) genügen, die im vorigen (§. 40.) durch A, B, C, etc. etc. etc. bezeichneten Werthe ergeben.

§. 42. Zusatz 3.

Enthält die (§. 39.) gegebene Funktion

$$V=f(x, y, z, u, w, \text{etc. etc.})$$

die m Veränderlichen x, y, z, u, w, etc. etc., und sind diese nicht alle von einander unabhängig, sondern hat man zwischen ihnen noch eine Anzahl μ von Gleichungen

$$\varphi=0,\ \varphi_1=0,\ \varphi_2=0, \text{ etc. etc. } \varphi_{\mu-1}=0,$$

so kann man μ der Veränderlichen, mittelst dieser Gleichungen

aus V wegschaffen, so daß V eine bloß unmittelbare Funktion der $m-\mu$ übrigen (absolut) Veränderlichen wird, und der Lehrsatz (§. 39.) findet dann sogleich die Werthe dieser übrigen absolut Veränderlichen, und die Bedingungen, unter denen V in Bezug auf die, zu den von einander ganz unabhängig gedachten nächst größern und nächst kleinern Werthen dieser absolut Veränderlichen, gehörigen Nachbar-Werthe von V, ein Maximum oder ein Minimum wird.

Berücksichtigt man aber die Ausnahmsfälle nicht, in denen eine oder mehrere der Ableitungen von V nach den absolut Veränderlichen genommen $=\infty$ wird, so findet man die nöthigen Gleichungen mittelst der „Methode der Multiplikatoren", indem man

$$V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\lambda_2.\varphi_2+\ldots\ldots+\lambda_{\mu-1}.\varphi_{\mu-1}$$

statt V setzt, und nun die Ableitungen davon nach allen vorkommenden Veränderlichen, alle als von einander ganz unabhängig betrachtet, einzeln $=0$ nimmt, aus den m entstehenden Gleichungen die μ unbestimmten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\mu-1}$ eliminirt, und aus den $m-\mu$ übrig bleibenden Gleichungen in Verbindung mit den μ Gleichungen

$$\varphi=0,\ \varphi_1=0,\ \ldots\ \varphi_{\mu-1}=0$$

die Werthe aller m in V vorkommenden Veränderlichen bestimmt.

Die zum Behuf des bequemern Ausdrucks dieser praktischen Regel (Methode der Multiplikatoren) fingirte Unabhängigkeit der m Veränderlichen von einander, darf jedoch nicht auf die Ableitungen der zweiten Ordnung erstreckt werden, wenn es auch vielleicht bequemer ist, auch hier überall statt V den gleichen Ausdruck

$$V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\lambda_2.\varphi_2+\ldots+\lambda_{\mu-1}.\varphi_{\mu-1}$$

zu setzen, in so ferne dann wenigstens die Gleichungen $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2.\varphi}{\partial y^2}=0$, etc. etc. etc. oder die Gleichungen

$\delta^2\varphi=0$, $\delta^2\varphi_1=0$, etc. etc., welche zur Bestimmung der zweiten Ableitungen aller abhängig Veränderlichen, oder der zweiten Variationen derselben (die nicht $=0$ gesetzt werden dürfen) dienen müssen, **nicht** in Betrachtung gezogen zu werden brauchen, weil jene zweiten Ableitungen oder zweiten Variationen dann von selbst wegfallen; wenn nur immer die Abhängigkeit der μ Veränderlichen, welche durch die Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, ... $\varphi_{\mu-1}=0$ gegeben ist, gehörig berücksichtigt und gewürdigt wird. (Vergl. §. §. 20—23. 31—33. 35—37.).

§. 43. Zusatz 4.

Verschieden vom (§. 42.) wäre jedoch die Aufgabe, wenn V (§. 39.) ein Maximum oder Minimum werden sollte, in Bezug auf alle nächst größern oder nächst kleinern Werthe von x, y, z, etc. etc. etc., welche von den Funktionen

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{\mu-1}$ des (§. 42.), nur einige oder gar keine zu Null machen, dagegen allen unverändert denselben, immer, oder doch zum Theil, **nicht** gegebenen Werth lassen sollen.

Die Rechnung würde ganz genau dieselbe bleiben, wie im (§. 42.), weil man hier wie dort $\delta\varphi=0$, $\delta^2\varphi=0$, etc. $\delta\varphi_1=0$, $\delta^2\varphi_1=0$, etc., etc. etc. etc., hat, so daß wenn auch hier nicht

$$V+\lambda.\varphi+\lambda_1.\varphi_1+\ldots+\lambda_{\mu-1}.\varphi_{\mu-1}=V \quad \text{seyn kann,}$$

doch
$$\delta V+\lambda.\delta\varphi+\lambda_1.\delta\varphi_1+\ldots+\lambda_{\mu-1}.\delta\varphi_{\mu-1}=\delta V$$
und
$$\delta^2 V+\lambda.\delta^2\varphi+\lambda_1.\delta^2\varphi_1+\ldots+\lambda_{\mu-1}.\delta^2\varphi_{\mu-1}=\delta^2 V$$
hier eben so gut seyn muß, wie dort (§. 42.).

Der Unterschied in den Resultaten wird nur darin bestehen, daß hier zuletzt zur Bestimmung der Werthe von x, y, z, etc. etc. nicht noch alle μ Gleichungen

$\varphi=0$, $\varphi_1=0$, ... $\varphi_{\mu-1}=0$, zur Bestimmung mithelfen werden, weil sie hier nicht alle statt finden, eine Anzahl dieser Veränderlichen x, y, z, etc. daher

völlig unbestimmt bleiben wird. (Vergl. sorgfältig §. §. 24. 34. und 38.).

Anmerkung. Wir haben uns bis jetzt nur mit solchen Aufgaben beschäftigt, in welchen bloß Urfunktionen (d. h. solche, die weder Differential- noch Integral-Ausdrücke enthalten) vorkommen, und wir haben absichtlich gerade in diesem einfachsten Falle, jede Aufgabe aus mehren verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet, weil dies dazu dienen kann, das wahre Wesen der Variations-Rechnung und ihrer Anwendung auf die Lehre vom Maximum und Minimum noch bestimmter aufzufassen. — Eben deshalb werden wir nun bei den folgenden Aufgaben, in den bisher betrachteten Beziehungen, uns kürzer fassen können, indem wir nur noch ein für allemal bemerken, daß eine ähnliche Mehrseitigkeit der Ansicht und der Entwicklung auch bei vielen der folgenden Aufgaben statt findet, wenn wir auch nicht bei jeder derselben solche noch besonders in's Detail verfolgen sollten. — Um sich in den bisher betrachteten Aufgaben fester zu setzen, und in ihrer Auflösung Gewandtheit zu verschaffen, kann man sich, bis die hiezu gehörige Beispielsammlung erschienen seyn wird, am besten der „Uebungs-Aufgaben zur Lehre vom „Größten und Kleinsten" von Dr. Lehmus. Berlin 1823. bedienen.

Betrachten wir daher nun zunächst solche Aufgaben, in welche Differential-Ausdrücke eingehen.

§. 44. Aufgabe.

Es ist $V = f(x, y, y_1)$, y eine noch unbestimmte Funktion von x und y_1 ihre Ableitung nach x, nehmlich $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder ∂y (E. §. 36.). Man soll diejenige Funktion von x finden, welche statt y gesetzt, V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf alle Nachbar-Werthe von V, die sich ergeben, wenn für y die nächst größere oder nächst kleinere *) Funktion $y_{\varkappa}$ oder $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \text{etc.}$ ge-

*) Für jeden bestimmten Werth von x nehmlich hat y ebenfalls einen bestimmten und constanten Werth, und $y_{\varkappa}$ liefert dann für denselben bestimmten Werth von x allemal einen nächst größern und einen nächst kleinern Werth von y, in so ferne $\varkappa$ bald positiv, bald negativ, übrigens aber, wie immer, im Moment des Verschwindens gedacht wird.

setzt wird, wo δy, $\delta^2 y$, etc. wie y selbst, als Funktionen von x gedacht werden.

Auflösung. Die Nachbar-Werthe von $V = f(x, y, \partial y)$ sind hier offenbar $V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, \partial(y_\varkappa))$, oder weil $\partial(y_\varkappa)$ ebenfalls wie $y_\varkappa$, eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende Reihe bildet, deren erstes Glied ∂y oder y_1 ist, wenn man solche durch $(y_1)_\varkappa$ bezeichnet und y_1 als eine neue (wenn auch von y abhängige) Funktion von x ansieht, welche durch $\varkappa$ variirt und in $(y_1)_\varkappa$ oder $y_1 + \varkappa . \delta(y_1) + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2(y_1) + \text{etc.}$ übergeht, so sind dieselben Nachbar-Werthe von V durch

$$V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, (y_1)_\varkappa)$$ dargestellt.

Dann ist (nach B. §. 5. oder B. §. 8.):

$$1)\quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \delta(y_1),$$

$$2)\quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \delta(y_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . \delta(y_1)^2 + \\ + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \delta^2(y_1),$$

wo aber $\delta(y_1) = \delta . \partial y = \partial . \delta y$

und $\delta^2(y_1) = \delta^2 . \partial y = \partial . \delta^2 y$ ist (B. §. 6.); so daß

$$3)\quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \partial \delta y,$$

$$4)\quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \partial \delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2 + \\ + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \partial \delta^2 y.$$

Setzt man nun nach (§. 6.):

$$\text{I.}\quad \delta V = 0,$$

so zerfällt diese Gleichung nach (E. §. 85.) in:

$$5)\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad 6)\quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0;$$

welche im Allgemeinen zwei Differential-Gleichungen der ersten Ordnung sind (in so ferne sie y und $y_1 = \partial y$ enthalten);

und jede Funktion y, welche unserer Aufgabe genügt, muß nothwendig diesen beiden Gleichungen genügen. Umgekehrt muß man nun trachten, diejenige Funktion y von x zu finden, welche den beiden Gleichungen (5. und 6.) genügt, um diejenige zu haben, welche δV unabhängig von δy zu Null macht.

Wenn aber jede Funktion y von x, welche den Gleichungen (5. und 6.) genügt, auch derjenigen Gleichung genügen muß, welche aus (5. und 6.) durch Elimination von y_1 oder ∂y hervorgeht, und die wir hier durch

7) $\varpi(x, y) = 0$ bezeichnen wollen, so darf man doch nicht umgekehrt schließen, daß jede aus (7.) für y gefundene Funktion von x nothwendig auch den Gleichungen (5. und 6.) genügen müsse, und daher diejenige sey, welche $\delta V = 0$ mache. Wenn dagegen die aus der Gleichung (7.) für y gefundene Funktion von x, auch noch einer der beiden Gleichungen (5. oder 6.) genügt, so muß sie nothwendig auch der andern genügen, und genügt solche der einen dieser Gleichungen (5. und 6.) nicht, so kann sie auch nicht der andern genügen.

Nachdem man daher aus (5. und 6.) y_1 eliminirt, und dadurch die Gleichung (7.) erhalten hat, so sehe man zu, ob die aus (7.) für y sich ergebende Funktion von x auch noch der Gleichung (5.) oder der Gleichung (6.) genüge. Genügt keine der aus (7.) für y gefundenen Funktionen von x z. B. der Gleichung (5.), so ist eine Funktion, wie sie gesucht wird, unmöglich zu finden, weil eine solche nicht existirt. Genügt aber die aus (7.) für y gefundene Funktion von x, z. B. noch der Gleichung (5.), so ist sie diejenige, die nothwendig auch der Gleichung (6.) genügt und daher $\delta V = 0$ macht, und es hängt nun die fernere Untersuchung, ob solche Funktion y auch V wirklich zu einem Maximum oder Minimum machen, und welches von beiden statt finden werde, von $\delta^2 V$ ab (§. §. 7. 8.), welches sich wegen (5. u. 6.) auf

$$8)\ \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 . \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \partial \delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2$$

reducirt. — Da aber δy und $\partial \delta y$ zwar der Form nach von einander abhängen, aber nicht dem Werthe nach, in so ferne der Werth von δy und dann auch der von $\partial \delta y$ von den in δy beliebig gedachten Constanten abhängt, und für jeden gegebenen Werth von x noch ganz willkührlich gedacht werden kann, so wird dieses $\delta^2 V$ beständig $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ seyn, daher V ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ und zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} > \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1}\right)^2$ ist (E. §. 3.); wo man aber nicht übersehen darf, daß $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1}$ noch Funktionen von x sind, und daher für gewisse stetig auf einander folgende Werthe von x, der Bedingung des Maximums, für eine andere ähnliche Werthen-Reihe von x dagegen, der Bedingung des Minimums, und für eine dritte ähnliche Reihe der Werthe von x, weder dem einen noch dem andern entsprechen können.

Da endlich nach (§. 6.) auch noch $\delta V = \infty$ gesetzt werden muß, so erhält man noch die Systeme der Gleichungen

$$9)\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = \infty,$$

$$10)\ \frac{\partial V}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0,$$

$$11)\ \frac{\partial V}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = \infty,$$

welche alle noch Werthe für y (in x) liefern können, die der angegebenen Bedingung des Maximums oder Minimums genügen und für welche das Verfahren des (§. 7.) noch in Anwendung gebracht werden muß, um das Maximum vom Minimo zu unterscheiden. (Vergl. §. 16.).

Beispiel. Eine Curve zu finden, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, daß eine von der jedesmaligen Tangente an diesem Punkte abhängige Linie, oder Fläche, etc. ein Maximum oder Minimum werde, in Bezug auf alle nächstangrenzenden Curven.

Anmerk. Uebrigens kann hier nochmals bemerklich gemacht werden, warum in $y_{\varkappa}$ oder $y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+$ etc. etc., welches die für jeden Werth von x, dem y nächst größern und nächst kleinern Werthe vorstellt, die Coefficienten δy, $\delta^2 y$, etc. im Allgemeinen (und hier namentlich) als Funktionen von x angesehen werden müssen. Hätte man nehmlich δy, $\delta^2 y$ etc. als nach x constant gedacht, so hätte $y_{\varkappa}$ zwar noch immer nächstangrenzende Werthe von y bezeichnet, aber $\partial(y_{\varkappa})$ hätte sich dann bloß auf ∂y reducirt, weil die Ableitungen aller der übrigen, nach x constanten Glieder von $y_{\varkappa}$, $=0$ geworden seyn würden. Dies hätte also dem besondern Falle entsprochen, daß ∂y auch bei jedem geänderten Zustand von y ungeändert bleiben soll, was hier gar nicht vorausgesetzt war.

§. 45. Zusatz 1.

Sollte aber ausdrücklich V zu einem Maximum oder Minimum werden, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche entstehen, wenn $y_{\varkappa}$ statt y gesetzt, dieses $y_{\varkappa}$ aber so gedacht wird, daß der Werth für ∂y unverändert derselbe bleibt; so würde sich, da nun $\delta.\partial y=\partial\delta y=0$ ist, die Gleichung $\delta V=0$ auf $\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y=0$, und in so ferne δy noch immer willkührlich gedacht ist, auch auf

$$\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

reduciren, welche Gleichung integrirt, y in x mit einer willkührlichen Constante liefert, die noch einer zweiten Bedingung genügen kann, etwa der, daß y für einen gegebenen Werth α von x, ebenfalls einen gegebenen Werth β haben soll.

Eben so wird unter dieser Voraussetzung bloß

$$\delta^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2;$$

und $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ zeigt also an, daß V in dieser Beziehung ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ ist. (Vergl. §. 24.).

Beispiel. Dasselbe wie zu (§. 44.); nur mit der noch hinzugefügten Bedingung, daß die nächstangrenzenden Curven, in Bezug auf welche die gesuchte Curve das Maximum oder Minimum liefern soll, nicht ganz willkührlich, sondern von allen nur diejenigen genommen seyn sollen, deren zu derselben Abscisse gehörigen Tangenten alle mit einander parallel laufen.

§. 46. Zusatz 2.

Soll aber V ein Maximum oder Minimum werden, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche aus $V = f(x, y, \partial y)$ hervorgehen, wenn man für y die nächst größern und nächst kleinern Funktionen $y_{\varkappa}$ oder $y + \varkappa . \delta y + \text{etc. etc.}$ setzt, dabei δy, etc. etc. als beliebige Funktionen von x sich denkt, jedoch für jeden andern Werth von x anders und jedesmal so genommen, daß für diesen besondern Werth von x, dies δy, etc. etc. der Null gleich wird, so daß y selbst für jeden bestimmten Werth von x unverändert bleiben, und nur ∂y eine Aenderung erleiden soll; so reducirt sich für jeden bestimmten Werth von x, weil für ihn $\delta y = 0$, aber $\partial \delta y$ noch beliebig seyn soll, die Gleichung $\delta V = 0$ bloß auf $\frac{\partial V}{\partial y_1} = 0$. — Integrirt man daher diese letztere, so erhält man y in x mit einer willkührlichen Constante, welche man sich auch noch dadurch bestimmt denken kann, daß noch einer Bedingung genügt wird, etwa der, daß zu $x = \alpha$, $y = \beta$ gehören soll, wo α und β gegebene Werthe sind. Ferner wird, für jeden bestimmten Werth von x, eben weil für ihn immer $\delta y = 0$ (und auch $\delta^2 y = 0$, wenn man nicht bloß $y + \varkappa . \delta y$ statt $y_{\varkappa}$ genommen hat) gedacht wird, auch

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2,$$

so daß V in der hier gedachten Beziehung ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$

seyn wird, so oft $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist. (Vergl. §. 24.).

Beispiel. Dasselbe wie zu (§. 44.), jedoch mit der noch hinzugefügten Bedingung, daß nur unter denjenigen Curven diejenige für das Maximum oder Minimum herausgesucht werden soll, welche alle den jedesmal zu betrachtenden Punkt gemeinschaftlich haben.

§. 47. Zusatz 3.

Statt anzunehmen, daß die nächst größern und nächst kleinern Werthe y_n von y, (welche die Nachbar-Werthe von V liefern, in Bezug auf welche V selbst ein Maximum oder ein Minimum werden soll) so genommen seyen, daß $\delta y, \delta^2 y$ etc. zwar Funktionen von x, aber für jeden Werth von x immer anders und immer so gedacht sind, daß entweder ∂y wie im (§. 45.) oder y wie im (§. 46.) unverändert bleiben, — statt dessen — kann man sich auch $\delta y, \delta^2 y$, etc. als solche Funktionen von x denken, die zwar auch für jeden Werth von x immer anders, aber jedesmal so genommen seyn sollen, daß für denselben Werth von x eine gegebene Funktion $\varphi(x, y, y_1)$ unverändert bleibe.

Man hat dann außer $\delta V = 0$ d. h. außer

1) $\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta y = 0$ (§. 6., $\delta V = \infty$ übergehend) auch noch für jeden Werth von x, $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc., also namentlich:

2) $\frac{\partial \varphi}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}.\partial\delta y = 0.$

Weil nun in der Gleichung (1.) δy und $\partial\delta y$ nicht von einander unabhängig, sondern mittelst der Gleichung (2.) von einander abhängig sind, so muß $\partial\delta y$ aus (1. und 2.) eliminirt werden, und man erhält dann (nach E. §. 1.):

3) $\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda.\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$ unter der Voraussetzung, daß

$$4) \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0$$ zur Bestimmung von λ genommen ist. Eliminirt man daher λ aus den Gleichungen (3. und 4.), so erhält man diejenige Gleichung

$$5) \quad \pi(x, y, y_1) = 0,$$

welche, wenn sie erfüllt ist, $\delta V = 0$ macht. — Integrirt man dann diese Gleichung, so erhält man y in x und einer willkührlichen Constante C (die noch so bestimmt werden kann, daß noch einer Bedingung der Aufgabe entsprochen wird), welche $\delta V = 0$ macht.

Zur Unterscheidung des Maximums vom Minimo hat man dann

$$6) \quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \partial \delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2 + \\ + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \partial \delta^2 y;$$

aber auch noch $\delta^2 \varphi = 0$ d. h.

$$7) \quad 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \partial \delta y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2 + \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial y} . \delta^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} . \partial \delta^2 y.$$

Multiplicirt man nun die (7.) mit dem obigen λ und addirt das Resultat zu (6.), so eliminiren sich $\delta^2 y$ und $\partial \delta^2 y$ sogleich vermöge der Gleichungen (3. und 4.), und man erhält: *)

$$8) \quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 (V + \lambda . \varphi)}{\partial y^2} . \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 (V + \lambda . \varphi)}{\partial y . \partial y_1} . \delta y . \partial \delta y + \\ + \frac{\partial^2 (V + \lambda . \varphi)}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2,$$

wo λ den aus (3. und 4.) zu ziehenden Werth hat, als eine Funktion von x betrachtet werden kann, die aber nach y und

---

*) Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß nach der Annahme φ nicht Null ist, sondern nur unveränderlich.

Beispiele. Dasselbe wie (§. 49.), jedoch noch mit den hinzugefügten Bedingungen, daß das Maximum oder Minimum nur statt finden soll in Bezug auf diejenigen Curven

I. welche für dieselbe Abscisse denselben Krümmungshalbmesser haben und parallele Tangenten, oder

II. welche den jedesmal zu betrachtenden Punkt gemein haben und deren Krümmungshalbmesser sich verhalten wie die Würfel der trigonometrischen Sekanten der Winkel, welche ihre Tangenten an demselben Punkte mit der Abscissen-Axe machen, oder

III. welche den jedesmal zu betrachtenden Punkt und auch die Tangente an denselben gemeinschaftlich haben.

§. 51. Zusatz 2.

Ferner kann man auch die Funktion y von x suchen, welche V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche sich für die nächst größern und nächst kleinern Werthe y_n von y ergeben, unter der Voraussetzung, daß in letzteren die δy, $\delta^2 y$, etc. als Funktionen von x, aber für jeden Werth von x anders, und jedesmal so gedacht sind, daß nur einer der drei Ausdrücke y, ∂y, $\partial^2 y$ unverändert bleibe, die beiden andern aber sich ändern. Dies giebt wieder 3 Aufgaben, je nachdem 1) $\partial^2 y$, oder 2) ∂y, oder 3) y unverändert bleiben soll; und führt

im 1sten Falle zu I. $\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\partial\delta y=0;$

im 2ten Falle zu II. $\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\partial^2\delta y=0;$

im 3ten Falle zu III. $\frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\partial\delta y+\frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\partial^2\delta y=0;$

wenn man jedesmal $\delta V=0$ nimmt, nach (§. 6.).

In jeder der 3 Aufgaben zerfällt dann die Gleichung wieder in

I. $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial y_1}=0$,

oder in II. $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial y_2}=0$,

oder in III. $\frac{\partial V}{\partial y_1}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial y_2}=0$,

wo dann für jede einzelne der 3 Aufgaben der Werth y in x gesucht werden muß, der den jedesmal statt findenden beiden Gleichungen zugleich genügt.

Eben so reducirt sich der Ausdruck von $\delta^2 V$ in jeder dieser 3 Aufgaben auf einen einfachern, weil man entweder 1) $\partial^2\delta y = \partial^2\delta^2 y = 0$, oder 2) $\partial\delta y = \partial\delta^2 y = 0$ oder 3) $\delta y = \delta^2 y = 0$ hat; und so wird dann das Maximum oder Minimum eben so unterschieden, wie wenn die jedesmaligen beiden andern der 3 Ausdrücke δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, die nicht Null seyn sollen, von einander ganz unabhängig wären (nach §. 37.).

§. 52. Zusatz 3.

Statt einen oder zwei der 3 Ausdrücke y, ∂y und $\partial^2 y$ als unveränderlich anzunehmen, in Beziehung auf die dem y nächstvorhergehenden und nächstfolgenden Funktionen-Werthe von y, kann man sich auch diese nächstangrenzenden Werthe y_x von y, so denken, daß δy, $\delta^2 y$, etc. zwar Funktionen von x sind, die jedoch mit einem andern Werthe von x ebenfalls anders und jedesmal so gedacht werden, daß entweder I) eine Funktion $\varphi(x, y, y_1, y_2)$ oder II) zwei solche Funktionen φ und φ_1 **unverändert** bleiben, für jeden bestimmten Werth von x; wo dann

$$\delta\varphi = 0,\ \delta\varphi_1 = 0,\ \delta^2\varphi = 0,\ \delta^2\varphi_1 = 0,\ \text{etc.}$$

sind, für jeden bestimmten Werth von x, ohne daß jedoch φ oder φ_1 selbst für jeden Werth von x der Null gleich wäre.

I. Nehmen wir zuerst an, daß nur die eine Funktion φ unverändert bleiben soll, für jeden Werth von x, so hat man bloß $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. etc., also

$$1)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}.\partial^2\delta y = 0,$$

und die Gleichung $\delta V = 0$ (§. 6.), nehmlich

$$2)\ \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta y = 0;$$

welche letztere Gleichung also nicht für gänzlich unabhängige Werthe von δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, statt finden soll, sondern für diejenigen, welche zugleich der Gleichung (1.) entsprechen.

Eliminirt man daher $\partial^2\delta y$ aus (1. und 2.), so erhält man (nach E. §. 1.):

$$3)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).\delta y+\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right).\partial\delta y=0,$$

wenn λ bestimmt ist durch die Gleichung

$$4)\quad \frac{\partial V}{\partial y_2}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0.$$

Und weil bloß zwischen δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, die einzige Gleichung (1.) existirt, so sind δy, $\partial\delta y$ noch von einander ganz unabhängig, und es zerfällt daher die Gleichung (3.) wiederum in

$$5)\quad \frac{\partial V}{\partial y_1}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0$$

und

$$6)\quad \frac{\partial V}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

wo λ selbst bestimmt ist durch die Gleichung (4.).

Wird also aus den Gleichungen (4—6.) λ eliminirt, so bleiben zwei Gleichungen, jede im Allgemeinen von der 2ten Ordnung, welche durch

$$7)\quad \pi(x, y, \partial y, \partial^2 y)=0 \quad \text{und} \quad 8)\quad \pi_1(x, y, \partial y, \partial^2 y)=0$$

vorgestellt seyn mögen; und jede Funktion y von x, welche diesen beiden Gleichungen $\pi=0$ und $\pi_1=0$ genügt, macht $\delta V=0$.

Wenn aber jede Funktion y von x, welche den Gleichungen (7. und 8.) genügt, auch derjenigen Gleichung

$$9)\quad \pi_2(x, y, \partial y)=0$$

genügen muß, welche aus (7. und 8.) durch Elimination von $\partial^2 y$ hervorgeht, so wird doch nicht umgekehrt jede Funktion y von x, welche der (9.) genügt, auch den Gleichungen (7. und 8.) genügen müssen; deshalb muß man noch untersuchen, ob die aus (9.) hervorgehende Funktion y von x,

wirklich einer der Gleichungen (7. und 8.) genügt, und nur dann ist sie diejenige Funktion, welche $\delta V = 0$ macht.

Nimmt man nun $\delta^2 V$ und bringt solches mit $\delta^2\varphi = 0$ durch Elimination von $\partial^2\delta^2 y$ in Verbindung (dadurch daß man $\delta^2 V = \delta^2 V + \lambda . \delta^2\varphi$ nimmt, und λ wie oben bestimmt seyn läßt), so fallen $\partial\delta^2 y$ und $\delta^2 y$ von selbst weg, und man erhält

$$10)\ \delta^2 V = \frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y.\partial y_1}.\delta y.\partial\delta y + \\ + \frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y_1^2}.(\partial\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y.\partial y_2}.\delta y.\partial^2\delta y + \\ + 2\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y_1.\partial y_2}.\partial\delta y.\partial^2\delta y + \frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y_2^2}.(\partial^2\delta y)^2,$$

wo λ den obigen Werth hat, also eine Funktion von x ist, die jedoch nach y, y_1, y_2 als constant angesehen wird, d. h. als y, y_1, y_2 nicht unmittelbar enthaltend; und eliminirt man daraus noch $\partial^2\delta y$ mittelst der Gleichung (1.), so ergiebt sich $\delta^2 V$ von der Form

$$A.\delta y^2 + 2B.\delta y.\partial\delta y + C.(\partial\delta y)^2,$$

wo δy und $\partial\delta y$ von einander ganz unabhängige reelle Werthe bedeuten, so daß nach (E. §. 3.) augenblicklich entschieden werden kann, ob dieses $\delta^2 V$ immer $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$, demnach V selbst ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ ist. *)

II. Wird aber die andere Aufgabe gegeben, wo zwei solche Funktionen φ und φ_1 unverändert bleiben sollen, so hat man

$$1)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}.\partial^2\delta y = 0 \qquad \text{und}$$

*) Zu diesem Falle würde das Beispiel des (§. 49.) gehören, wenn noch die Bedingung hinzugefügt würde, daß das Maximum oder Minimum nur in Bezug auf diejenigen nächstangrenzenden Curven gesucht wird, welche für dieselbe Abscisse die gerade betrachtet wird, allemal denselben Krümmungshalbmesser haben.

seyn scheinen, so kann doch der höchst wesentliche Unterschied nicht unbeachtet bleiben, der sich besonders auch darinn äußert, daß die hiesige Aufgabe (§. 48.) nur in höchst seltenen Fällen eine Auflösung wirklich zulassen wird, während die Aufgabe des (§. 47.) beinahe immer einer Auflösung gewiß ist.

§. 49. Aufgabe.

Es ist gegeben $V = f(x, y, y_1, y_2)$, wo y eine Funktion von x, und y_1, y_2 ihre beiden Ableitungen nach x, nehmlich ∂y und $\partial^2 y$ vorstellen. Man soll diejenige Funktion y von x finden, welche V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf alle zu $y_\varkappa$ statt y gehörigen Nachbar-Werthe $V_\varkappa$ von V.

Auflösung. Man hat hier diese Nachbar-Werthe

$$V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, \partial(y_\varkappa), \partial^2(y_\varkappa)),$$

die man auch so schreiben kann

$$V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, (y_1)_\varkappa, (y_2)_\varkappa),$$

indem man y_1 und y_2 als besondere, für sich durch $\varkappa$ zu variirende Funktionen ansieht, so daß

$(y_1)_\varkappa$ die Reihe $\quad y_1 + \varkappa . \delta(y_1) + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2(y_1) + \ldots$

und $(y_2)_\varkappa$ die Reihe $\quad y_2 + \varkappa . \delta(y_2) + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2(y_2) + \ldots$

vorstellt, in welchen Reihen jedoch $\delta(y_1)$, etc., $\delta(y_2)$, etc., nicht ganz beliebig, sondern nach (B. §. 6.) von δy selbst abhängig sind, so nehmlich daß

$$\delta^n . (y_2) = \delta^n . \partial^2 y = \partial^2 . \delta^n y, \qquad \text{und}$$
$$\delta^n . (y_1) = \delta^n . \partial y = \partial . \delta^n y \qquad \text{ist.}$$

Es ist nun, diese Gleichungen gebrauchend:

$$1)\ \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1} . \partial \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2} . \partial^2 \delta y$$

(B. §. 5. oder B. §. 9.).

Setzt man daher nach (§. 6.), $\delta . V = \infty$ übergehend,

$\delta V = 0$, so liefert dies nach (E. §. 85.),

da die Werthe von δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$ für jedes beliebige x, von einander ganz unabhängig sind:

$$2)\ \frac{\partial V}{\partial y}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y_1}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y_2}=0,$$

und jede Funktion y von x, welche diesen 3 Gleichungen genügt, macht $\delta V=0$, und kann dann weiter untersucht werden, ob sie auch $\delta^2 V \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ macht, unabhängig von δy, etc.

Eliminirt man aus diesen 3 Gleichungen (2.) sowohl y_2 als auch y_1, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche durch $\pi(x, y)=0$ vorgestellt seyn mag. — Genügt nun dieser Werth y in x, einer der Gleichungen (2.) nicht, so ist das gesuchte Maximum oder Minimum wenigstens in $\delta V=0$ nicht enthalten. Genügt aber dieses y in x nach zweien der 3 Gleichungen (2.), also auch der dritten, so muß nur noch untersucht werden, ob $\delta^2 V \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ wird, für jedes δy und für ein gegebenes x, und dann ist V selbst ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ für diesen Werth von x.

Es wird aber diese Untersuchung genau so geführt, wie wenn y, y_1, y_2 von einander ganz unabhängig wären, ganz den (§. §. 39. 40.) gemäß; auch wenn nachgehends noch $\delta V=\infty$ genommen wird.

Beispiel. Die Curve zu suchen, für welche in jedem ihrer Punkte eine von dem Krümmungshalbmesser (und wenn man will auch noch von der Tangente) abhängige Linie, Fläche, etc. etc. ein Maximum oder Minimum werde, in Bezug auf alle nächstangrenzenden Curven, und die in ihnen zu derselben Abscisse gehörigen Punkte.

§. 50. Zusatz 1.

Man kann sich nun die Aufgabe auch so denken, daß V ein Maximum oder Minimum werden soll, für diejenigen Nachbar-Werthe, welche zu den nächst größern und nächst kleinern, durch y. oder $y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+\text{etc.}$ vorge-

stellten Werthen von y, gehören, unter der Voraussetzung, daß δy, $\delta^2 y$, etc. zwar Funktionen von x seyn sollen, die aber für jeden bestimmten Werth von x anders und jedesmal so gedacht sind, daß für denselben bestimmten Werth von x, von den 3 Ausdrücken y, ∂y und $\partial^2 y$ irgend zweie unverändert bleiben sollen, und nur der dritte geändert erscheint.

Dies giebt 3 verschiedene Aufgaben, nehmlich entweder
1) sollen ∂y und $\partial^2 y$, oder
2) y und $\partial^2 y$, oder endlich
3) y und ∂y unverändert dieselben Werthe behalten.

Im Falle (1.) müßte man für jeden möglichen Werth von x, den man betrachtete, $\partial\delta y = \partial^2\delta y = 0$, eben so $\partial\delta^2 y = \partial^2\delta^2 y = \text{etc.} = 0$ annehmen, und die Gleichung $\delta V = 0$ reducirte sich dann bloß auf

$$\text{I. } \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

In der Aufgabe (2.) dagegen hätte man für jeden gegebenen Werth von x, der betrachtet werden sollte,

$$\delta y = \delta^2 y = \text{etc.} = \partial^2\delta y = \partial^2\delta^2 y = \text{etc.} = 0,$$

und die Gleichung $\delta V = 0$ reducirt sich nun auf

$$\text{II. } \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0.$$

In der dritten Aufgabe dagegen, würde man für jeden einzelnen Werth von x,

$$\delta y = \partial\delta y = \delta^2 y = \partial\delta^2 y = \text{etc.} = 0$$ sich denken, so daß die Gleichung $\delta V = 0$ sich bloß auf

$$\text{III. } \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0$$ zurück ziehen würde.

In jeder der 3 Aufgaben hätte man eine Differential-Gleichung der 2ten Ordnung (I. oder II. oder III.), welche integrirt, y in x mit 2 willkührlichen Constanten liefert (die so bestimmt werden können, daß noch zweien andern Bedin-

gungen der Aufgabe genügt wird) und für welches $\delta V = 0$ werden würde.

Unter denselben Voraussetzungen würde man haben, im Falle (I.):

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2;$$

im Falle (II.):

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} . (\partial \delta y)^2;$$

und im Falle (III.):

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} . (\partial^2 \delta y)^2$$

vermöge der jedesmaligen Voraussetzungen, und der Gleichungen (I. oder II. oder III.); und so wird dann in jeder einzelnen dieser 3 Aufgaben das $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von V in der angegebenen Beziehung statt finden, wenn in der ersten $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, oder in der 2ten $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$, oder endlich in der 3ten $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ unabhängig von δy, $\partial \delta y$, $\partial^2 \delta y$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist. (Vergl. §. §. 45. 46.).

Anmerkung. Man findet diese letzteren Aufgaben (§. 48.) wozu auch die (§. §. 45. 46.) angegebenen gehören, von Lagrange in der Théorie des fonctions behandelt. Sie lassen offenbar viel öfter eine Auflösung zu, als die Aufgaben der (§. §. 44. 48. 49.), und dies mag der Grund seyn, warum Lagrange nur diese Gattung derselben betrachtet hat. Es wäre aber offenbar eine unrichtige Ansicht, wenn man in den Aufgaben (§. §. 44. 49.) das Zerfällen von $\delta V = 0$, in die einzelnen Gleichungen deshalb als unzulässig aufstellen wollte, weil
δy, $\partial \delta y$, $\partial^2 \delta y$, etc. Ableitungen aus einander, daher nicht von einander unabhängig sind. *)

---

*) Vergl. Analyt. Darst. d. Variations-Rechnung. Berlin 1823. p. p. 45. 46.

Beispiele. Dasselbe wie (§. 49.), jedoch noch mit den hinzugefügten Bedingungen, daß das Maximum oder Minimum nur statt finden soll in Bezug auf diejenigen Curven

I. welche für dieselbe Abscisse denselben Krümmungshalbmesser haben und parallele Tangenten, oder

II. welche den jedesmal zu betrachtenden Punkt gemein haben und deren Krümmungshalbmesser sich verhalten wie die Würfel der trigonometrischen Secanten der Winkel, welche ihre Tangenten an demselben Punkte mit der Abscissen-Axe machen, oder

III. welche den jedesmal zu betrachtenden Punkt und auch die Tangente an denselben gemeinschaftlich haben.

§. 51. Zusatz 2.

Ferner kann man auch die Funktion y von x suchen, welche V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe von V, welche sich für die nächst größern und nächst kleinern Werthe y_n von y ergeben, unter der Voraussetzung, daß in letzteren die δy, $\delta^2 y$, etc. als Funktionen von x, aber für jeden Werth von x anders, und jedesmal so gedacht sind, daß nur einer der drei Ausdrücke y, ∂y, $\partial^2 y$ unverändert bleibe, die beiden andern aber sich ändern. Dies giebt wieder 3 Aufgaben, je nachdem 1) $\partial^2 y$, oder 2) ∂y, oder 3) y unverändert bleiben soll; und führt

im 1sten Falle zu I. $\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta y=0$;

im 2ten Falle zu II. $\frac{\partial V}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta y=0$;

im 3ten Falle zu III. $\frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta y+\frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta y=0$;

wenn man jedesmal $\delta V=0$ nimmt, nach (§. 6.).

In jeder der 3 Aufgaben zerfällt dann die Gleichung wieder in

I. $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial y_1}=0$,

oder in II. $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial y_2}=0$,

oder in III. $\frac{\partial V}{\partial y_1}=0$ und $\frac{\partial V}{\partial y_2}=0$,

wo dann für jede einzelne der 3 Aufgaben der Werth y in x gesucht werden muß, der den jedesmal statt findenden beiden Gleichungen zugleich genügt.

Eben so reducirt sich der Ausdruck von $\delta^2 V$ in jeder dieser 3 Aufgaben auf einen einfachern, weil man entweder 1) $\partial^2\delta y = \partial^2\delta^2 y = 0$, oder 2) $\partial\delta y = \partial\delta^2 y = 0$ oder 3) $\delta y = \delta^2 y = 0$ hat; und so wird dann das Maximum oder Minimum eben so unterschieden, wie wenn die jedesmaligen beiden andern der 3 Ausdrücke δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, die nicht Null seyn sollen, von einander ganz unabhängig wären (nach §. 37.).

§. 52. Zusatz 3.

Statt einen oder zwei der 3 Ausdrücke y, ∂y und $\partial^2 y$ als unveränderlich anzunehmen, in Beziehung auf die dem y nächstvorhergehenden und nächstfolgenden Funktionen-Werthe von y, kann man sich auch diese nächstangrenzenden Werthe y_{x} von y, so denken, daß δy, $\delta^2 y$, etc. zwar Funktionen von x sind, die jedoch mit einem andern Werthe von x ebenfalls anders und jedesmal so gedacht werden, daß entweder I) eine Funktion $\varphi(x, y, y_1, y_2)$ oder II) zwei solche Funktionen φ und φ_1 **unverändert** bleiben, für jeden bestimmten Werth von x; wo dann

$$\delta\varphi = 0, \ \delta\varphi_1 = 0, \ \delta^2\varphi = 0, \ \delta^2\varphi_1 = 0, \text{ etc.}$$

sind, für jeden bestimmten Werth von x, ohne daß jedoch φ oder φ_1 selbst für jeden Werth von x der Null gleich wäre.

I. Nehmen wir zuerst an, daß nur die eine Funktion φ unverändert bleiben soll, für jeden Werth von x, so hat man bloß $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. etc., also

$$1) \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}.\partial^2\delta y = 0,$$

und die Gleichung $\delta V = 0$ (§. 6.), nehmlich

$$2) \ \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta y = 0;$$

welche letztere Gleichung also nicht für gänzlich unabhängige Werthe von δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, statt finden soll, sondern für diejenigen, welche zugleich der Gleichung (1.) entsprechen.

Eliminirt man daher $\partial^2\delta y$ aus (1. und 2.), so erhält man (nach E. §. 1.):

$$3)\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).\delta y+\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right).\partial\delta y=0,$$

wenn λ bestimmt ist durch die Gleichung

$$4)\ \frac{\partial V}{\partial y_2}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0.$$

Und weil bloß zwischen δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, die einzige Gleichung (1.) existirt, so sind δy, $\partial\delta y$ noch von einander ganz unabhängig, und es zerfällt daher die Gleichung (3.) wiederum in

$$5)\ \frac{\partial V}{\partial y_1}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0$$

und $$6)\ \frac{\partial V}{\partial y}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

wo λ selbst bestimmt ist durch die Gleichung (4.).

Wird also aus den Gleichungen (4—6.) λ eliminirt, so bleiben zwei Gleichungen, jede im Allgemeinen von der 2ten Ordnung, welche durch

$$7)\ \pi(x, y, \partial y, \partial^2 y)=0 \quad \text{und} \quad 8)\ \pi_1(x, y, \partial y, \partial^2 y)=0$$

vorgestellt seyn mögen; und jede Funktion y von x, welche diesen beiden Gleichungen $\pi=0$ und $\pi_1=0$ genügt, macht $\delta V=0$.

Wenn aber jede Funktion y von x, welche den Gleichungen (7. und 8.) genügt, auch derjenigen Gleichung

$$9)\ \pi_2(x, y, \partial y)=0$$

genügen muß, welche aus (7. und 8.) durch Elimination von $\partial^2 y$ hervorgeht, so wird doch nicht umgekehrt jede Funktion y von x, welche der (9.) genügt, auch den Gleichungen (7. und 8.) genügen müssen; deshalb muß man noch untersuchen, ob die aus (9.) hervorgehende Funktion y von x,

wirklich einer der Gleichungen (7. und 8.) genügt, und nur dann ist sie diejenige Funktion, welche $\delta V = 0$ macht.

Nimmt man nun $\delta^2 V$ und bringt solches mit $\delta^2\varphi = 0$ durch Elimination von $\partial^2\delta^2 y$ in Verbindung (dadurch daß man $\delta^2 V = \delta^2 V + \lambda . \delta^2\varphi$ nimmt, und λ wie oben bestimmt seyn läßt), so fallen $\partial\delta^2 y$ und $\delta^2 y$ von selbst weg, und man erhält

$$10)\ \delta^2 V = \frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y.\partial y_1}.\delta y.\partial\delta y +$$
$$+\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y_1^2}.(\partial\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y.\partial y_2}.\delta y.\partial^2\delta y +$$
$$+2\frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y_1.\partial y_2}.\partial\delta y.\partial^2\delta y + \frac{\partial^2(V+\lambda.\varphi)}{\partial y_2^2}.(\partial^2\delta y)^2,$$

wo λ den obigen Werth hat, also eine Funktion von x ist, die jedoch nach y, y_1, y_2 als constant angesehen wird, d. h. als y, y_1, y_2 nicht unmittelbar enthaltend; und eliminirt man daraus noch $\partial^2\delta y$ mittelst der Gleichung (1.), so ergiebt sich $\delta^2 V$ von der Form

$$A.\delta y^2 + 2B.\delta y.\partial\delta y + C.(\partial\delta y)^2,$$

wo δy und $\partial\delta y$ von einander ganz unabhängige reelle Werthe bedeuten, so daß nach (E. §. 3.) augenblicklich entschieden werden kann, ob dieses $\delta^2 V$ immer $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{Bmatrix}$, demnach V selbst ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{Bmatrix}$ ist. *)

II. Wird aber die andere Aufgabe gegeben, wo zwei solche Funktionen φ und φ_1 unverändert bleiben sollen, so hat man

$$1)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}.\partial\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}.\partial^2\delta y = 0 \qquad \text{und}$$

*) Zu diesem Falle würde das Beispiel des (§. 49.) gehören, wenn noch die Bedingung hinzugefügt würde, daß das Maximum oder Minimum nur in Bezug auf diejenigen nächstangrenzenden Curven gesucht wird, welche für dieselbe Abscisse die gerade betrachtet wird, allemal denselben Krümmungshalbmesser haben.

$$2)\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}.\partial \delta y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}.\partial^2 \delta y = 0,$$

während die nach (§. 6.) gebildete Gleichung $\delta V = 0$ ($\delta V = \infty$ nicht berücksichtigend) noch immer

$$3)\ \frac{\partial V}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2 \delta y = 0$$

giebt, jedoch nicht für jedes δy, sondern nur für diejenigen, die noch den Gleichungen (1. und 2.) genügen, welche zwischen δy, $\partial \delta y$, $\partial^2 \delta y$, für jeden Werth von x, den man betrachten mag, eine solche Abhängigkeit begründen, daß zwei davon, als durch diese Gleichungen gegeben, angesehen werden müssen, und nur etwa δy selbst unabhängig bleibt. — Eliminirt man aber aus den Gleichungen (1, 2, 3.) $\partial^2 \delta y$ und $\partial \delta y$, (nach E. §. 1.), so erhält man, weil δy jeden ganz willkührlichen Werth noch haben kann,

$$4)\ \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda.\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda_1.\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0,$$

wenn λ und λ_1 bestimmt sind, durch die Gleichungen

$$5)\ \frac{\partial V}{\partial y_1} + \lambda.\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \lambda_1.\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = 0$$

und $$6)\ \frac{\partial V}{\partial y_2} + \lambda.\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \lambda_1.\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} = 0. \qquad \text{(E. §. 1.)}.$$

Werden also λ und λ_1 aus den Gleichungen (4—6.) weggeschafft, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, y_1 und y_2, welche integrirt, y in x mit zwei willkührlichen (noch zweien andern Bedingungen der Aufgabe zu genügenden) Constanten, als diejenige Funktion von x giebt, die $\delta V = 0$ macht.

Nimmt man nachgehends $\delta^2 V$ und eliminirt daraus $\partial \delta^2 y$ und $\partial^2 \delta^2 y$ mittelst der Gleichungen $\delta^2 \varphi = 0$ und $\delta^2 \varphi_1 = 0$, dadurch daß man $\delta^2 V = \delta^2 V + \lambda.\delta^2 \varphi + \lambda_1.\delta^2 \varphi_1$ nimmt, und λ, λ_1 die obigen Werthe vorstellen läßt, wo dann $\delta^2 y$, $\partial \delta^2 y$, $\partial^2 \delta^2 y$ von selbst wegfallen, so erhält man $\delta^2 V$ wie in (I. 10.) nur hier $V + \lambda.\varphi + \lambda_1.\varphi_1$ statt dort $V + \lambda.\varphi$ gesetzt und indem man λ und λ_1 als nach y, y_1 und y_2

constant aussieht, wenn sie auch mittelst der Gleichungen (4—6.) als Funktionen von x sich ergeben. Wird dann aus diesem $\delta^2 V$, das $\partial^2\delta y$ und $\partial\delta y$ mittelst der Gleichungen (1. und 2.) noch weggeschafft, so bleibt $\delta^2 V$ von der Form $A.\delta y^2$ und ist daher $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$, wenn A es ist, unabhängig von δy. (Vergl. §. §. 47. 34. 38.).

Anmerkung. Man kann aber noch bemerken, daß die Aufgabe (§. 52. I.) die 3 Aufgaben des (§. 51.) als eben so viele besondere Fälle in sich schließt, wenn nehmlich $\varphi(x, y, \partial y, \partial^2 y)$ sich bloß auf $\partial^2 y$ oder ∂y oder y selbst reducirt. — Eben so enthält die Aufgabe (§. 52. II.) alle 3 Aufgaben des (§. 50.) als besondere Fälle in sich, wenn nehmlich die Funktionen φ und φ_1 bloß beziehlich in

$\partial^2 y$ und ∂y
oder in $\partial^2 y$ und y
oder in ∂y und y übergehend angenommen werden.

§. 53. Zusatz 4.

Von diesen Aufgaben der vorhergehenden (§. §.) ganz verschieden, muß die Aufgabe betrachtet werden, wo unter allen einander nächstangrenzenden Funktionen y von x, welche zugleich einer Gleichung

$$\varphi(x, y, y_1, y_2) = 0,$$

oder welche zugleich zweien solchen Gleichungen $\varphi = 0$ und $\varphi_1 = 0$ genügen, diejenige gesucht wird, welche V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf alle zu den nächstangrenzenden Werthen von y gehörigen Nachbar-Werthe von V.

I. Betrachtet man auch hier zuerst den Fall, wo nur eine Gleichung

$$\varphi(x, y, y_1, y_2) = 0$$

gegeben ist, so hat man hier auch, wie im vorhergehenden (§. 52. I.) $\delta V = 0$ und $\delta\varphi = 0$, und dahero alle übrigen Gleichungen bis zu (7. und 8. inclusive) hier genau wie dort; wenn auch der Unterschied statt findet, daß hier die

Werthe für das Maximum oder Minimum gesucht werden sollten, indem man zwischen $y, y_1, y_2 \ldots y_m$ keine andere Abhängigkeit berücksichtigt, als die durch diese Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. gegebene, den Satz (E. §. 86.) in Erwägung ziehend.

Soll aber

III. die Funktion y von x gesucht werden, welche das Maximum oder Minimum von V liefert, in Bezug auf diejenigen nächst größern oder nächst kleinern Werthe y_u von y, für welche δy, $\delta^2 y$, etc. zwar als Funktionen von x, aber für jeden bestimmten Werth von x anders und jedesmal so gedacht sind, daß

1) $m-1$ Ausdrücke wie $\varphi(x, y, y_1, y_2 \ldots y_m)$, φ_1, φ_2, etc. unverändert bleiben, oder

2) nur eine geringere, übrigens beliebige Zahl μ dieser Funktionen φ, φ_1, etc. etc. unverändert bleiben,

so werden die Gleichungen

$$\delta\varphi = 0, \ \delta\varphi_1 = 0, \ \delta\varphi_2 = 0, \text{ etc. etc.}$$

im ersten Falle $m-1$ Gleichungen, im andern μ Gleichungen liefern, wie in dem Falle (II.) und das ganze Verfahren wird dann genau dasselbe bleiben, wie in dem Falle (II.), nur mit dem Unterschiede, daß außer den zuletzt erhaltenen Gleichungen, denen die gesuchte Funktion y zu genügen hat, hier nicht, wie dort in (II.) noch die Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. existiren, denen das y ebenfalls noch genügen muß; weshalb die Aufgaben dieses Falles viel häufiger eine Auflösung wirklich zulassen werden, als wie die des Falles (II.). — Namentlich werden die Aufgaben, die zu dem Falle (III. 1.) gehören, in den meisten Fällen eine Auflösung wirklich zulassen, weil sie immer nur zu einer einzigen Gleichung der m^{ten} Ordnung führen, welche integrirt y in x mit m willkührlichen Constanten liefert, wo die letzteren allemal noch so bestimmt werden können, daß noch m vorhandenen Bedingungen der Aufgabe

Genüge geleistet wird, *) im Allgemeinen. (Vergl. §. 43.). Der Beweis fällt, dem vorhergehenden zu Folge, leicht in die Augen.

Anmerkung. Es enthält aber (III. 1.) auch alle diejenigen Aufgaben in sich als besondere Fälle, wo alle die Ausdrücke y, ∂y, $\partial^2 y$, ... $\partial^m y$ bis auf einen einzigen beliebigen unverändert bleiben sollen, für alle nächstangrenzenden Werthe von y, in Bezug auf welche das Maximum oder Minimum gesucht wird. Diese eben erwähnten Aufgaben allein aber findet man von Lagrange und den nachfolgenden Schriftstellern behandelt, und es scheint daher in diesem Theile der Lehre vom Maximum und Minimum eine bedeutende Lücke auszufüllen gewesen zu seyn. (Vergl. Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung. Berlin 1823. p. p. 45. 46.).

§. 55. Zusatz.

Aber nun ist auch der Weg gebahnt, für diejenigen Aufgaben, wo in V auch noch z als Funktion von x, und ihre durch z_1, z_2, z_3, etc. z_n bezeichneten Ableitungen nach x vorkommen, und nun die Funktionen y und z gesucht werden, für welche V ein Maximum oder Minimum werden sollen, es mögen noch Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. zwischen y und dessen Ableitungen und z und dessen Ableitungen gegeben seyn, denen außerdem noch genügt werden soll; oder es mögen gewisse Funktionen φ, φ_1 etc. derselben Ausdrücke ohne Null zu seyn, unverändert bleiben sollen. — Nicht weniger würde der Weg derselbe bleiben, wenn außerdem noch mehrere Funktionen u, v, etc. nebst ihren Ableitungen in V vorkommen sollten. — Jedesmal werden die Sätze (§. 39. und §. 42. oder §. 43.) in Anwendung kommen können.

§. 56. Bemerkung.

Ist y eine unbekannte Funktion von x, so sind ∂y, $\partial^2 y$ etc. (Ableitungen nach x genommen) ebenfalls un-

*) Es versteht sich, daß diese Bedingungen von der Art seyn müssen, daß ihnen durch eine zweckmäßige Bestimmung der Constanten allein wirklich Genüge geleistet werden kann.

bekannte, wenn auch von y abhängige, Funktionen von x. Wenn daher a ein Werth von x ist, und y_a, $(\partial y)_a$, $(\partial^2 y)_a$ etc. die Bedeutung (E. §. 34.) haben, so sind y_a, $(\partial y)_a$, etc. als nach x constante Ausdrücke anzusehen, wenn sie auch so lange einen unbekannten Werth haben, als y selbst noch eine unbekannte Funktion von x ist, und ihr Werth sich ändert, so wie für y eine andere Funktion von x gesetzt wird. Dasselbe gilt für y_b, $(\partial y)_b$, etc., y_c, $(\partial y)_c$, etc., wenn b, c, etc. ebenfalls Werthe von x vorstellen. — Es können aber Aufgaben des Maximums und Minimums vorkommen, in denen die gegebene Funktion V, außer

$$x,\ y,\ \partial y,\ \partial^2 y \ldots \partial^m y, \quad \text{auch noch} \quad y_a,\ y_b,\ \text{etc.}$$
$$(\partial y)_a,\ (\partial y)_b,\ \text{etc. etc.},\ (\partial^2 y)_a,\ (\partial^2 y)_b,\ \text{etc. etc.};$$

eben so außer $z, \partial z, \partial^2 z, \ldots \partial^n z,$ auch noch

$$z_c,\ z_d,\ (\partial z)_c,\ (\partial z)_d,\ (\partial^2 z)_c,\ (\partial^2 z)_d,\ \text{etc. etc. etc.}$$

enthält. Und da diese Gattungen von Aufgaben sich eben so oft darbieten können, als die bisher betrachteten, so wollen wir uns noch eine solche Aufgabe vorlegen.

§. 57. Aufgabe.

Es ist V=

$$f(x, y, \partial y, \partial^2 y, \ldots \partial^m y, y_a, (\partial y)_a \ldots (\partial^n y)_a, y_b, (\partial y)_b, \ldots (\partial^p y)_b)$$

man soll diejenige Funktion y von x finden, für welche V ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle zu beliebig nächst größern und nächst kleinern Werthen $y_{\varkappa}$ von y, gehörigen Nachbar-Werthe von V.

Auflösung. So wie

statt y gesetzt wird $y_{\varkappa}$ oder $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y +$ etc. etc.

so geht ∂y in $\partial . (y_{\varkappa})$ oder $\partial y + \varkappa . \partial \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \partial \delta^2 y +$ etc. etc.

und $\partial^2 y$ in $\partial^2 . (y_{\varkappa})$ oder $\partial^2 y + \varkappa . \partial^2 \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \partial^2 \delta^2 y +$ etc. etc.

u. s. w. f.

endlich $\partial^m y$ in $\partial^m.(y_\varkappa)$ oder $\partial^m y + \varkappa.\partial^m \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!}.\partial^m \delta^2 y + etc.$ über; aber auch

y_a in $(y_\varkappa)_a$ oder $y_a + \varkappa.(\delta y)_a + \frac{\varkappa^2}{2!}.(\delta^2 y)_a + etc.$

und

$(\partial y)_a$ in $(\partial(y_\varkappa))_a$ oder $(\partial y)_a + \varkappa.(\partial \delta y)_a + \frac{\varkappa^2}{2!}.(\partial \delta^2 y)_a + etc.$

und

$(\partial^2 y)_a$ in $(\partial^2(y_\varkappa))_a$ oder $(\partial^2 y)_a + \varkappa.(\partial^2 \delta y)_a + \frac{\varkappa^2}{2!}.(\partial^2 \delta^2 y)_a +$

u. s. w. f. — Bezeichnet man nun, der Bequemlichkeit wegen, die Ableitungen $\partial y, \partial^2 y, \ldots \partial^m y$ als neue Funktionen von x durch beziehlich $y_1, y_2 \ldots y_m$, so kann man $V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_m, y_a, (y_1)_a, (y_2)_a, \ldots (y_n)_a, y_b, (y_1)_b, (y_p)_b)$ schreiben, und

$y_1, y_2, \ldots y_m, y_a, (y_1)_a, (y_2)_a, \ldots (y_n)_a, y_b, (y_1)_b \ldots (y_p)_b$

als eben so viele verschiedene Ausdrücke ansehen, welche dadurch, daß y in $y_\varkappa$ oder in $y + \varkappa.\delta y + \frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y + etc.$ übergeht, ebenfalls in, nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihen übergehen, welche letztere dann durch

$(y_1)_\varkappa, (y_2)_\varkappa \ldots (y_m)_\varkappa, (y_a)_\varkappa, ((y_1)_a)_\varkappa \ldots ((y_n)_a)_\varkappa, (y_b)_\varkappa$ etc.

vorgestellt, so wie die Coefficienten derselben beziehlich durch $\delta(y_1), \delta(y_2) \ldots \delta(y_m), \delta(y_a), \delta((y_1)_a), \delta((y_2)_a), \ldots \delta((y_n)_a), \delta(y_b)$, etc. eben so $\delta^2(y_1)$, etc. $\delta^2(y_a)$, etc. $\delta^2(y_b)$, etc. etc. bezeichnet werden können, wo man dann freilich bemerken muß, daß z. B. für jede Zahl n,

$$\delta(y_n) = \delta \quad \partial^n y = \partial^n \delta y$$

und $\qquad \delta((y_n)_a) = (\delta(\partial^n y))_a = (\partial^n \delta y)_a,$

eben so, allgemein:

$$\delta^m.(y_n) = \partial^n.\delta^m y$$

und $\qquad \delta^m.((y_n)_a) = (\partial^n.\delta^m y)_a \qquad$ seyn muß.

Weil aber die Werthe von

$$\delta y, \partial \delta y, \partial^2 \delta y \ldots \partial^m \delta y, (\delta y)_a, (\partial \delta y)_a, \text{ etc. etc.}$$

$(\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_b \dots (\partial^n\delta y)_b$, etc. etc. für jeden bestimmten Werth von x; von den in die beliebige Funktion δy beliebig eingehenden Constanten abhängen werden, so sind diese Werthe von einander eben so unabhängig, wie wenn zwischen δy, $\partial\delta y$, etc. als Funktionen von x auch der Form nach keine Abhängigkeit statt fände. — Folglich wird diese Aufgabe genau nach (§. 39.) behandelt, eben so wie wenn

$$y,\ y_1,\ y_2, \text{ etc. } y_m,\ y_a,\ (y_1)_a \dots y_b, \text{ etc. etc.}$$

eben so viele von einander ganz unabhängige Ausdrücke wären.

§. 58. Zusatz 1.

Berücksichtigt man daher $\delta V = \infty$ nicht, so erhält man bloß

$$1)\ \frac{\partial V}{\partial y}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y_1}=0, \dots \frac{\partial V}{\partial y_m}=0,\ \frac{\partial V}{\partial (y_a)}=0,\ \frac{\partial V}{\partial (y_1)_a}=0, \dots$$

$$\frac{\partial V}{\partial (y_n)_a}=0,\ \frac{\partial V}{\partial (y_b)}=0,\ \frac{\partial V}{\partial (y_1)_b}=0, \dots \frac{\partial V}{\partial (y_p)_b}=0, \text{ etc. etc.}$$

wo nach (E. §. §. 35. 36.) für jede Zahl n, $\frac{\partial V}{\partial (y_n)_a}$ die Ableitung vorstellt von V, in so ferne es den Ausdruck $(y_n)_a$ explicit enthält, nach diesem letztern (als Veränderlichen betrachtet) genommen.

Jede Funktion y von x, welche den Gleichungen (1.) zusammen genügt, ist nun diejenige, welche $\delta V = 0$ macht, für welche also dann $\delta^2 V$ näher untersucht, und sonach das Maximum von dem Minimo unterschieden werden kann.

Jede Funktion y von x, welche allen Gleichungen (1.) genügt, genügt auch derjenigen Gleichung, die aus den Gleichungen (1.) durch Elimination von

$$y_1,\ y_2 \dots y_m,\ y_a,\ (y_1)_a \dots (y_n)_a,\ y_b,\ (y_1)_b, \dots (y_p)_b \text{ etc. etc.}$$

hervorgeht, und welche im allgemeinen bloß x und y enthalten wird, und durch

$$2)\quad \pi(x,\ y)=0$$

bezeichnet werden kann.

Genügt nun der aus (2.) gefundene Werth von y in x einer der Gleichungen (1.) nicht, so ist eine Auflösung der Aufgabe, die aus $\delta V = 0$ hervorgienge, unmöglich.

Die Untersuchung des $\delta^2 V$ für $\delta V = 0$ geschieht genau nach (§. 40.) und (§. 57.).

§. 59. Zusatz 2.

Auch bei dieser Aufgabe kann man die Funktion y von x suchen, welche V zu einem Maximum oder Minimum macht, in Bezug auf diejenigen nächst größern und nächst kleinern Werthe von y, die durch $y_\varkappa$ oder $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \text{etc.}$ vorgestellt sind, und in welchen δy, $\delta^2 y$, etc. zwar als Funktionen von x, jedoch als solche gedacht sind, die für jeden bestimmten Werth von x sich ändern und jedesmal so genommen sind, daß beliebig viel beliebiger Funktionen φ, φ_1, φ_2, etc. der in V vorkommenden Ausdrücke unverändert bleiben. — Diese Voraussetzung liefert die Gleichungen

$\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc., $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta^2\varphi_1 = 0$, etc. etc. etc.

und zwar wird z. B. $\delta\varphi = 0$ von der Form seyn

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} . \partial\delta y + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_m} . \partial^m \delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial (y_a)} . (\delta y)_a +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial (y_1)_a} . (\partial\delta y)_a + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial (y_n)_a} . (\partial^n \delta y)_a + \frac{\partial\varphi}{\partial (y_b)} . (\delta y)_b +$$

$$+ \text{etc. etc.} + \frac{\partial\varphi}{\partial (y_p)_b} . (\partial^p \delta y)_b + \text{etc. etc.} = 0;$$

eben so die übrigen $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 = 0$, etc. etc.

Dieser Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 = 0$, etc. wird man sich nun bedienen, um mittelst ihrer so viel wie möglich von den Ausdrücken

δy, $\partial\delta y$, ... $\partial^m \delta y$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_a$, ... $(\partial^n \delta y)_a$, $(\delta y)_b$, etc. etc.

aus δV zu eliminiren, so daß dann die übrigen als ihrem Werthe nach von einander ganz unabhängig angesehen und behandelt werden können, ganz so wie im (§. 54. III.).

Auch die Methode der Multiplikatoren findet nach (E. §. 1.) ihre Anwendung.

Beispiel. Man soll die Curve suchen, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, daß das Produkt der beiden, in der Richtung der zu $x=a$ und $x=b$ gehörigen Ordinaten genommenen Abstände der Tangente von der Curve, weniger dem Quadrat der zu diesen Abscissen $x=a$, $x=b$ gehörigen Sehne der Curve, ein Maximum oder Minimum werde. (Zu §. §. 57. 58.). —

So wie aber das Maximum oder Minimum nur in Beziehung auf diejenigen Nachbar-Curven gesucht wird, in welchen gewisse durch dieselben Punkte bestimmte Linien oder Flächen denselben Werth behalten sollen, so gehört das Beispiel zu (§. 59.).

§. 60. Zusatz 3.

Ferner können außer den Bedingungen der Aufgabe (§. 57.) selbst, auch noch Gleichungen

$$\varphi(x, y, y_1 \dots y_m, y_a, (y_1)_a, \dots (y_n)_a, y_b, (y_1)_b \dots (y_p)_b) = 0$$

und ähnliche $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, etc. gegeben seyn, für jeden Werth von x, wo dann auch

$$\delta\varphi = 0, \ \delta^2\varphi = 0, \text{ etc. } \delta\varphi_1 = 0, \ \delta^2\varphi_1 = 0, \text{ etc. etc.}$$

seyn, und daher alles so wie vorher (§. 59.) vor sich gehen muß, wenn nur hier die Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, etc., da sie zwischen δy, $\partial\delta y$ etc. als Funktionen von x existiren, und jede für sich durch Integration das δy liefert, dieses δy nicht so enge bestimmen, daß nicht noch diejenige hinlängliche Zahl unbestimmter und willkührlicher Constanten eingehen könnte, durch welche die nach gehöriger Elimination in δV übrig bleibenden Ausdrücke

$$\delta y, \partial\delta y, \dots (\delta y)_a, (\partial\delta y)_a \text{ etc. etc.}$$

ihrem Werthe nach, für jedes gegebene x, als von einander ganz unabhängig angesehen werden können.

Auch findet hier in Bezug auf die vorhergehende Aufgabe (§. 55.) der wichtige Unterschied statt, daß die Funktion y von x nicht nur den aus $\delta V = 0$ (oder $= \infty$) sich ergebenden Gleichungen, sondern auch noch den gegebenen Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. genügen muß, so daß diese Aufgabe weit seltener noch einer Auflösung fähig seyn wird, als die (§. 59.) berührte.

§. 61. Zusatz 4.

Endlich versteht sich, daß in den (§. §. 58—60.) gegebenen Aufgaben, die Funktion V außer y und dessen Angehörigen, auch noch andere Funktionen z, u, etc. mit ihren Angehörigen enthalten kann, und daß das Verfahren deshalb noch immer, dem Wesen nach, keine Abänderung erleidet. —

Anmerkung. In allen den bisher behandelten Aufgaben, so wie überhaupt bei jeder Aufgabe, muß man nie unterlassen, noch $\partial V = \infty$ zu setzen, wenn wir auch hier solches zu thun häufig unterlassen haben. Nur dann ist man sicher, keine Werthe vernachlässigt zu haben, welche ein Maximum oder Minimum liefern.

§. 62. Aufgabe.

Es ist $V = f(x, y, z, z_1^0, z_0^1)$ wo z_1^0 statt $\frac{\partial z}{\partial x}$, und z_0^1 statt $\frac{\partial z}{\partial y}$ steht, während z als eine Funktion von x und y gedacht ist. Man soll die Funktion z finden, für welche V ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle nächst größern und nächst kleinern Funktionen $z_\varkappa$ oder $z + \varkappa . \delta z + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 z + \text{etc. etc.}$

Auflösung. So wie z in $z + \varkappa . \delta z + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 z + \text{etc.}$ übergeht, so geht

z_1^0 oder $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $(z_\varkappa)_1^0$ oder $\frac{\partial (z_\varkappa)}{\partial x}$

d. h. in $\frac{\partial z}{\partial x} + \varkappa . \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\varkappa^2}{2!} . \frac{\partial \delta^2 z}{\partial x} + \text{etc. etc.}$

und

z_0^1 oder $\frac{\partial z}{\partial y}$ in $(z_\varkappa)_0^1$ oder $\frac{\partial (z_\varkappa)}{\partial y}$

d. h. in $\frac{\partial z}{\partial y} + \varkappa . \frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\varkappa^2}{2!} . \frac{\partial \delta^2 z}{\partial y} + \text{etc.}$ über.

Also, so wie z in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortgehende unendliche Reihe übergeht, so gehen auch z_1^0 und z_0^1

in solche Reihen über, die durch $(z_1^0)_n$ und $(z_0^1)_n$ bezeichnet werden können, so daß dann (nach B. §. 6.)

$$\delta^n(z_1^0) = \delta^n \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \delta^n z}{\partial x}$$

und
$$\delta^n(z_0^1) = \delta^n \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \delta^n z}{\partial y}$$
ist;

und die Nachbar-Werthe von V in Bezug auf welche V selbst das Maximum oder das Minimum werden soll, sind ausgedrückt durch

$$V_n = f\left(x, y, z_n, \frac{\partial(z_n)}{\partial x}, \frac{\partial(z_n)}{\partial y}\right)$$

oder
$$V_n = f(x, y, z_n, (z_1^0)_n, (z_0^1)_n),$$

so daß man hier hat

$$1)\ \delta V = \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\delta z + \frac{\partial V}{\partial(z_1^0)}\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial(z_0^1)}\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial y}.$$

In so ferne nun die Werthe von δz, $\frac{\partial\delta z}{\partial x}$, $\frac{\partial\delta z}{\partial y}$ für jedes Paar Werthe von x und y, von den in δz beliebig eingehenden Constanten abhängen werden, so sind sie als von einander völlig unabhängig anzusehen, und die nach (§. 6.) gebildete Gleichung
$$\delta V = 0$$
zerfällt daher in

$$2)\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial(z_1^0)} = 0 \text{ und } \frac{\partial V}{\partial(z_0^1)} = 0.$$

Jede Funktion z von x und y nun, welche diesen 3 Gleichungen (2.) genügt, macht $\delta V = 0$, und liefert das $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von V in der gegebenen Beziehung, wenn $\delta^2 V$, für jeden reell gedachten, übrigens beliebigen Werth von δz, $\frac{\partial\delta z}{\partial x}$, $\frac{\partial\delta z}{\partial y}$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ wird. — Es ist aber nach (B. §. 24. oder B. §. 5.)

$$\delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.\delta z^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z.\partial(z_1^0)}.\delta z.\frac{\partial\delta z}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial^2 V}{\partial(z_1^0)^2}.\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z.\partial(z_0^1)}.\delta z.\frac{\partial\delta z}{\partial y}$$

$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial(z_1^0).\partial(z_0^1)}.\frac{\partial\delta z}{\partial x}.\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial.(z_0^1)^2}\left(\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right)^2.$$

§. 63. Zusatz 1.

Würde man wieder zur Bedingung machen, daß nur diejenigen Nachbar-Werthe von y berücksichtigt werden sollen, für welche δz, $\delta^2 z$, etc. zwar als Funktionen von x und y angesehen, aber für jeden Werth von x und von y anders und jedesmal so gedacht seyn sollen, daß eine oder zwei gegebene Funktionen φ, oder φ und φ_1 von x, y, z, z_1^0, z_0^1, unverändert bleiben sollen, so hätte man wiederum die Gleichungen

$$\delta\varphi = 0,\ \delta\varphi_1 = 0,\ \delta^2\varphi = 0,\ \delta^2\varphi_1 = 0, \text{ etc. etc.},$$

so daß z. B. $\delta\varphi = 0$ die Form

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\delta z + \frac{\partial\varphi}{\partial(z_1^0)}.\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial(z_0^1)}.\frac{\partial\delta z}{\partial y} = 0$$

haben würde, wo denn die Ausdrücke $\delta z, \frac{\partial\delta z}{\partial x}, \frac{\partial\delta z}{\partial y}$ eben durch diese Gleichungen von einander abhängig sind, also so viele derselben, als Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, vorhanden sind, aus δV eliminirt werden müssen, um nachher die übrigen als von einander ganz unabhängig anzusehen und zu behandeln, genau so wie in den (§. §. 47. 52.) für den einfachern Fall bereits gezeigt worden ist.

Beispiel. Die Fläche zu finden, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, daß eine von ihrer Tangential-Ebene an diesem Punkt abhängige Linie, Fläche, etc. etc. ein Maximum oder Minimum werde, entweder unter allen nächstangrenzenden Flächen, oder nur unter denjenigen, für welche die Tangenten zweier Schnitte dieselbe Lage behalten sollen, oder welche einen Punkt gemein haben (und zwar den jedesmal betrachteten) und für welche noch die Tangente eines Schnittes durch diesen Punkt, dieselbe Lage behält.

§. 64. Zusatz 2.

Sollten aber alle nächstangrenzenden Werthe von z noch der Gleichung $\varphi(x, y, z, z_1^0, z_0^1)=0$, oder auch noch einer zweiten Gleichung genügen, so würde man ganz dieselben Resultate erhalten, wie im vorhergehenden (§. 63.), nur mit dem Unterschiede, daß die gesuchte Funktion z von x und y nicht bloß den aus $\delta V=0$ (oder $=\infty$) hervorgehenden Gleichungen, sondern auch noch den Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$ genügen muß, die Aufgabe hier daher noch viel seltener eine Auflösung zulassen wird, als die des (§. 63.).

§. 65. Zusatz 3.

Mann kann nun die Aufgabe des (§. 62.) dahin verallgemeinern, daß man

$$V=f(x, y, z, z_1^0, z_0^1, z_2^0, z_1^1, z_0^2, \ldots z_m^0, z_{m-1}^1 \ldots z_0^m)$$

sich denkt, und nun das Maximum oder Minimum dieser Funktion V sucht in Bezug auf die Nachbar-Werthe z_x von z. — Die Auflösung läuft immer darauf hinaus, daß man

$$z, z_1^0, z_0^1, z_2^0, z_1^1, z_0^2, \ldots z_m^0, z_{m-1}^1 \ldots z_0^m$$

als eben so viele von einander ganz unabhängige Funktionen von x und y betrachtet und die Aufgabe nach (§. 39.) unter dieser Voraussetzung behandelt, und nur statt $\delta^n . z_q^p$, das gleichbedeutende $\delta^n . \frac{\partial^{q+p} z}{\partial x^q . \partial y^p}$ oder das noch gleichbedeutende $\frac{\partial^{q+p} . \delta^n z}{\partial x^q . \partial y^p}$ substituirt. Und sind dann noch Bedingungen gegeben, entweder

1) daß gewisse gegebene Funktionen φ, φ_1, etc. der in V vorkommenden Veränderlichen und ihrer Ableitungen für alle angrenzenden Werthe von z unverändert bleiben sollen, welchen Werth von x und von y man sich denken möge, oder

2) daß durch alle angrenzenden Werthe von z, die in Be-

trachtung kommen sollen, noch Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$ genügt werden,

so wird man immer mittelst der Gleichungen

$\delta\varphi=0$, $\delta\varphi_1=0$, etc. etc., so viele der Ausdrücke

$$\delta z, \frac{\partial\delta z}{\partial x}, \frac{\partial\delta z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^m\delta z}{\partial x^m}, \frac{\partial^m\delta z}{\partial x^{m-1}\partial y}, \ldots \frac{\partial^m\delta z}{\partial y^m}$$

eliminiren müssen, als solche Gleichungen $\delta\varphi=0$, $\delta\varphi_1=0$, etc. gegeben sind, während die übrig bleibenden dann in (1.) ohne weiters von einander ganz unabhängig gedacht werden können, in (2.) aber nur in so ferne, als die gegebenen Gleichungen $\delta\varphi=0$, $\delta\varphi_1=0$, etc., da jede integrirt δy mit einer bestimmten Zahl willkührlicher Constanten oder mit willkührlichen Funktionen liefert, dieses δy mit der dazu hinreichenden Zahl von willkührlichen Constanten geben.

§. 66. Zusatz 4.

Ferner kann man die Aufgabe auch so stellen, daß in V, wenn a, c, etc. Werthe von x und b, d, etc. Werthe von y sind, und die Bezeichnung (E. §. 34.) gebraucht wird, auch noch die Ausdrücke $z_{a,b}$, $(z_1^0)_{a,b}$, $(z_0^1)_{a,b}$, etc. etc. eben so noch $z_{c,d}$, $(z_1^0)_{c,d}$, etc. etc. vorkommen, es mögen dabei noch dem (§. 65. n. n. 1. 2.) analoge Bedingungen gegeben seyn, oder nicht.

Ferner kann man sich in V außer z und ihren Angehörigen, auch noch ähnliche Funktionen u, v, etc. und ihre Angehörigen enthalten denken, und dabei entweder noch ähnliche Bedingungen, wie (§. 65. n. n. 1. 2.) gegeben, oder nicht. Schlüßlich könnte man sich auch noch eine Funktion V denken, welche beliebig viel absolut Veränderliche und beliebig viel relativ Veränderliche (als Funktionen der absolut Veränderlichen) und die Ableitungen der relativ Veränderlichen nach den absolut Veränderlichen genommen, in beliebiger Ordnung; endlich auch noch andere davon abhängige Ausdrücke (etwa für gegebene Werthe der absolut Veränderlichen)

enthielte, und nun diese Funktion V in irgend einer Beziehung ein Maximum oder ein Minimum werden sollte.

Jedesmal wird man nach Anleitung des Vorhergehenden und namentlich der (§. §. 39. 42. 43.) den Weg leicht verfolgen können, der zur Auffindung des gesuchten Maximums oder Minimums dienlich ist; weshalb wir hierüber noch in näheres Detail einzugehen, vermeiden.

Anmerkung. Beschäftigen wir uns daher von nun an noch mit der Auffindung der Maxima und Minima solcher Funktionen, in welche noch Integral-Ausdrücke eingehen, oder die selbst solche Integral-Ausdrücke sind.

§. 67. Aufgabe.

Es ist gegeben

$$V = f(x, y) \quad \text{und} \quad U = \int V . \partial x.$$

Man soll für y diejenige Funktion von x finden, für welche das bestimmte zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral (E. §. 49.) U_{b+a} ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle beliebige nächst größern und nächst kleinern Werthe y_n von y. *)

Auflösung. Setzt man y_n statt y, so werden die Nachbar-Werthe von V, jetzt $V_n = f(x, y_n)$ und die Nachbar-Werthe von U, $U_n = \int V_n . \partial x$. — Dabei ist nach (B. §. §. 5. 6. oder B. §. 11.):

$$1) \; \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y$$

und $$2) \; \delta U = \int (\delta V) . \partial x = \int \left(\frac{\partial V}{\partial y} . \delta y \right) . \partial x.$$

Uebergeht man nun $\delta(U_{b+a}) = \infty$ und setzt bloß nach (§. 6.) $\delta(U_{b+a}) = 0$, so hat man

*) In dieser Aufgabe sind die Beispiele (n. n. 16. 17. 18. 19.) des Cap. II. der (Methodus inven. lineas curvas maximi minive proprietate gaudentes. Lausannae et Genevae 1744) enthalten.

3) $\int_{b \div a} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \cdot \delta y\right) . \partial x = 0$

für jede Funktion von x, die statt δy gesetzt werden mag. Dies giebt (E. §. 93.):

4) $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, *)

welche Gleichung y in x so liefert, daß $\delta(U_{b \div a}) = 0$ wird. Ferner wird:

5) $\delta^2 U = \int (\delta^2 V) . \partial x = \int \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2 + \frac{\partial V}{\partial y} . \delta^2 y\right) . \partial x$,

welches sich vermöge der Gleichung (4.) auf

6) $\delta^2 U = \int \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} . \delta y^2\right) . \partial x$ reducirt.

Dieses $\delta^2(U_{b \div a})$ ist aber nun nach (E. §. §. 50. 51.) für den aus (4.) gefundenen Werth von y in x allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ und folglich $U_{b \div a}$ dann allemal ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, wenn $b > a$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn wird.

Ob aber, auch wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ nicht für jeden Werth von x zwischen a und b beständig ein und dasselbe Zeichen behält, nicht doch für die aus (4.) gefundene Funktion y von x das V ein Maximum oder Minimum seyn könne, d. h. ob, wenn

---

*) Wäre nehmlich nicht $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, so dürfte man nur

$\delta y = 1 : \frac{\partial V}{\partial y}$ setzen und erhielte dann

$\int_{b \div a} \left(\frac{\partial V}{\partial y} . \delta y\right) . \partial x = \int_{b \div a} \partial x = x_{b \div a} = b - a$,

welches offenbar nicht Null seyn kann, so lange, was hier immer vorausgesetzt wird, b von a verschieden ist.

$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ nicht für jeden Werth von x zwischen a und b ein und dasselbe Zeichen behält, dies allemal ein sicheres Kennzeichen sey, daß das aus (4.) gefundene y weder ein Maximum noch ein Minimum von V liefere, muß noch besonders untersucht werden. *)

Anmerkung. Die Bedingung, daß $\frac{\partial V}{\partial y}$ für keinen Werth von x zwischen a und b die Form ∞ annehmen dürfe, wenn $\delta^2(U_{b \dotplus a})$ nothwendig positiv oder negativ werden soll, noch ausdrücklich hinzu zu fügen, wäre ein Pleonasmus, da die Form ∞ weder zu den positiven noch zu den negativen Zahlen gehört, folglich durch die obige Bedingung ohnedieß schon ausgeschlossen ist.

Beispiel. Die Curve zu finden, welche zwischen zweien zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen parallelen Ordinaten den größten oder kleinsten Raum einschließt. — Desgleichen diejenige Curve zu finden, welche durch Umdrehen um ihre Abscissen-Axe einen Körper bildet, welcher zwischen $x = a$ und $x = b$ den größten Raum-Inhalt hat oder den kleinsten. — Für beide Aufgaben findet man, daß solche Curven nicht existiren, wenn man nicht die Gleichung $y = 0$ d. h. die Abscissen-Axe selbst dafür nehmen will.

§. 68. Aufgabe.

Es ist

$$V = f(x, y, y_1) \quad \text{und} \quad U = \int V . \partial x,$$

wo y eine Funktion von x, und y_1 ihre erste Ableitung ∂y bedeutet. Man soll diejenige Funktion y von x finden, für welche das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral $(U_{b \dotplus a})$ ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf die zu den nächst größern und nächst kleinern Werthen y_n von y, gehörigen Nachbar-Werthe von V. **)

---

*) Daß einer oder einige der Werthe von $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ für einen oder einige der Werthe von x, auch Null werden können, versteht sich nach (E. §. 50.) von selbst. Wird aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ für jeden Werth von x, $= 0$, so hängt die Untersuchung nach (§. §. 7. 8.) von $\delta^3 U$ und $\delta^4 U$ etc. etc. ab.

**) Hieher gehören die Beispiele (n. n. 32 — 38.) des II. Kap. der Methodus inven. lin. curv. max. min. (Euler), auch die (n. n. 9. 10. 11. 19. 20. 21. 27. 28. 29. 30.) des IV. Kap. desselben Buches.

Auflösung. Setzt man y_ω statt y, so erhält man

$$V_\omega = f(x, y_\omega, \partial(y_\omega)) \quad \text{und} \quad U_\omega = \int(V_\omega)\cdot\partial x,$$

während $(U_\omega)_{b\div a}$ die Nachbar-Werthe sind, in Bezug auf welche $U_{b\div a}$ selbst ein Maximum oder Minimum werden soll. Man hat nun nach (V. §. §. 5. 6. oder V. §. 11.):

$$1) \quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\partial\delta y \quad \text{und} \quad 2) \ \delta U = \int\delta V\cdot\partial x,$$

oder wenn man theilweise integrirt (E. §. §. 60. 62. oder V. §. 11. 12.)

$$3) \ \delta(U_{b\div a}) = \int_{b\div a}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \partial\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta y\cdot\partial x + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\delta y\right)_{b\div a}.$$

Setzt man, $\delta(U_{b\div a}) = \infty$ übergehend, nach (§. 6.)

$\delta(U_{b\div a}) = 0$, so zerfällt diese Gleichung nach (E. §. 93.), weil δy jede mögliche Funktion von x vorstellt, in

$$\text{I)} \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) = 0,$$

welches eine Gleichung zwischen x, y, y_1 und y_2, also eine Differential-Gleichung der 2ten Ordnung ist, und die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums genannt wird; und in

$$\text{II)} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b\cdot(\delta y)_b - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a\cdot(\delta y)_a = 0,$$

welche die Grenzgleichung heißt (wo a und b Werthe von x sind und, wie immer, die Bezeichnung (E. §. 34.) gebraucht ist), und welche nur zwischen (nach x) constanten Ausdrücken statt hat.

Die Gleichung (I.) integrirt, giebt y in x mit zwei willkührlichen Constanten C und C_1. — Die Grenzgleichung (II.) zerfällt, wegen der Willkührlichkeit von $(\delta y)_b$ und $(\delta y)_a$ wiederum in die beiden (E. §. 87.):

$$4) \ \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b = 0 \quad \text{und} \quad 5) \ \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a = 0;$$

welche im allgemeinen zur Bestimmung der beiden Constanten C und C_1 dienen werden.

Beispiel. Die Curve zu finden, welche zwischen zweien zu $x=a$ und $x=b$ gehörigen Punkten die längste oder die kürzeste ist; oder welche umgedreht einen Körper beschreibt, dessen Oberfläche zwischen $x=a$ und $x=b$ die größte oder die kleinste ist.

§. 69. Zusatz 1.

Hat man aber auf diese Weise die Funktion y von x bestimmt, welche $\delta(U_{b+a})=0$ macht, für jedes δy, so hängt das $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von V davon ab, ob $\delta^2(U_{b+a})$ für jedes reelle δy, $\delta^2 y$ etc. $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ seyn wird. Man hat aber

$$6)\quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1}.\delta y . \partial\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}.(\partial\delta y)^2 + \\ + \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta^2 y$$

und $\quad 7)\ \delta^2 U = \int \delta^2 V . \partial x.$ (B. §. 6.).

Integrirt man nun die beiden letzten Glieder in (6.) theilweise, so erhält man, wegen der Gleichungen (I. und II. 4. 5.) das Integral $=0$, so daß bloß wird

$$8)\quad \delta^2 U = \int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1}.\delta y . \partial\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}.(\partial\delta y)^2\right). \partial x;$$

und wir wollen der Kürze wegen, das was aus

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y . \partial y_1},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$$

hervorgeht, in so ferne für y (und dann auch für y_1) die oben (aus I. und II.) gefundene Funktion von x gesetzt wird, durch

beziehlich M, N, P bezeichnen.

Man setze nun, um so viel wie möglich zu integriren,

$$\int(M.\delta y^2 + 2N.\delta y . \partial\delta y + P.(\partial\delta y)^2).\partial x = \alpha.\delta y^2 \\ + \int(C.\delta y^2 + 2B.\delta y . \partial\delta y + A.(\partial\delta y)^2).\partial x,$$

so erhält man, wenn auf beiden Seiten nach x differentiirt, und die Identität der Ausdrücke hergestellt wird,

$A = P = \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$, $B = N - \alpha$, $C = M - \partial\alpha$,

und

$$9)\ \delta^2(U_{b+a}) = \alpha_b . (\delta y)^2_b - \alpha_a . (\delta y)^2_a$$
$$+ \int_{b+a} (C . \delta y^2 + 2B . \delta y . \partial\delta y + A . (\partial\delta y)^2) . \partial x,$$

während für α jede beliebige Funktion von x gesetzt werden kann.

Aber eben weil α so ganz willkührlich ist, so kann man α so genommen denken, daß $AC = B^2$

d. h. $10)\ P . (M - \partial\alpha) - (N - \alpha)^2 = 0$ wird, und dann hängt das Zeichen von

$$C . \delta y^2 + 2B . \delta y . \partial\delta y + A . (\partial\delta y)^2$$

allemal von dem Zeichen von A ab (E. §. 5.), und ist mit dem von A einerlei, wenn der gedachte Ausdruck nicht Null ist. Ist daher A oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so ist der mit dem Integralzeichen noch behaftete Theil von $\delta^2(U_{b+a})$ in (9.) ebenfalls $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ (E. §. 50.). Und weil die Gleichung (10.) wodurch α bestimmt wird, eine Differential-Gleichung ist, daher α mit einer willkührlichen Constante bestimmt, welche letztere in die übrigen constanten Theile von $\delta^2(U_{b+a})$ in (9.) eingehen wird und für jedes andere δy anders aber allemal so genommen werden kann, daß diese Theile zusammen $= 0$ werden, oder doch mit dem andern, noch mit dem $\int$ Zeichen behafteten Theil von $\delta^2(U_{b+a})$ einerlei Zeichen bekommen müssen; so ist also A oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ (einzelne Nullen-Werthe mit eingeschlossen) diejenige Bedingung, welche, wenn

sie sich erfüllt findet, allemal das $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ von V, in der gegebenen Beziehung, anzeigt.

Ist aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}=0$ für jeden Werth von x (wenigstens zwischen a und b) und zugleich auch $N=\frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_1}=0$ für jeden solchen Werth von x, so ist der unter dem $\int$ Zeichen stehende Ausdruck in (8.) nothwendig allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn M d. h. $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, für jeden Werth von x zwischen a und b, und es ist dann U abermals ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$. *)

Ob aber, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$ weder Null, noch beständig für jeden Werth von x zwischen a und b einerlei Zeichen behält, dies allemal anzeige, daß nun U weder ein Maximum noch ein Minimum seyn könne, bedarf jedesmal noch eines besonderen Nachweises.

Zu gleicher Zeit darf nicht übersehen werden, daß hier, so wie in der Folge immer, $b>a$ angenommen wird.

Anmerkung. Das hier befolgte Verfahren fällt vielleicht noch deutlicher in die Augen, wenn man bemerken will, daß ∂y jede mögliche Funktion von x vorstellt (die höchstens noch einigen (später) gegebenen Bedingungen genügen soll), daß man daher dies ∂y nebst seinen Ableitungen so viel wie möglich außerhalb des Integralzeichens brin-

*) In der: Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung. Berlin 1823 p. 115. findet man die Meinung ausgesprochen, daß $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}=0$ allemal anzeige, daß nun U weder ein Maximum noch ein Minimum seyn könne.

gen muß, weil die Integration selbst, so lange unter dem Integralzeichen noch ganz unbestimmte und willkührliche Funktionen von x stehen, auf keine Weise von statten gehen kann.

§. 70. Zusatz 2.

Man kann auch der Aufgabe (§. 68.) noch mehrere neue Bedingungen hinzufügen. Es kann nehmlich

A) eine Gleichung $\varphi(y_b, y_a)=0$ gegeben seyn, so daß nur unter allen denjenigen nächstangrenzenden Werthen von y, welche für $x=b$ und $x=a$ (an den Grenzen), dieser Gleichung $\varphi=0$ genügen, das Maximum oder Minimum von V verlangt wird; — dann können

B) zwei solche Gleichungen

$$\varphi(y_b, y_a)=0, \qquad \varphi_1(y_b, y_a)=0$$

(an den Grenzen), d. h. hier y_b und y_a selbst völlig bestimmt gegeben seyn; so daß nur unter denjenigen nächstangrenzenden Werthen von y das Maximum oder Minimum von V gesucht wird, welche an den Grenzen (d. h. für $x=b$ und für $x=a$) beständig dieselben völlig bestimmt gegebenen Werthe behalten; endlich können

C) der Grenzwerth y_b oder der andere y_a oder beide, zwar nicht gegeben seyn, aber doch beständig dieselben bleiben sollen.

Im ersten Falle (A), wenn sowohl $\varphi(y_b, y_a)=0$ als auch $\varphi((y_,)_b, (y_,)_a)=0$ seyn soll, hat man auch $\delta\varphi=0$ und $\delta^2\varphi=0$, oder

$$1) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}\cdot(\delta y)_b+\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}\cdot(\delta y)_a=0,$$

$$2) \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial(y_b)^2}\cdot(\delta y)^2_b+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial(y_b)\cdot\partial(y_a)}\cdot(\delta y)_b\cdot(\delta y)_a+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(y_a)^2}\cdot(\delta y)^2_a$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}\cdot(\delta^2 y)_b+\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}\cdot(\delta^2 y)_a=0,$$

wo $\delta(y_b)=(\delta y)_b$ und $\delta^2(y_b)=(\delta^2 y)_b$ u. s. w. ist.

Verfolgt man nun die Auflösung des (§. 68.), so findet man dieselbe allgemeine Gleichung (I.), eben so dieselbe Grenzgleichung (II.) nehmlich (E. §. 94.):

$$3)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b \cdot \delta y_b - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a \cdot (\delta y)_a = 0,$$

jedoch mit dem Unterschiede, daß sie nicht für jedes δy_b und δy_a, sondern nur für diejenigen δy_b, δy_a gilt, welche noch der hiesigen Gleichung (1.) entsprechen.

Eliminirt man daher δy_a, aus den Gleichungen (1.) und (3.), so erhält man nach (E. §. 1.):

$$4)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_b)} = 0,$$

unter der Voraussetzung daß

$$5)\quad -\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_a)} = 0$$

zur Bestimmung von λ dient. So wie also aus diesen beiden Gleichungen λ weggeschafft wird, so erhält man die Gleichung, welche hier an die Stelle der Gleichungen (3. und 4. des §. 68.) tritt, und welche in Verbindung mit der gegebenen Gleichung $\varphi(y_b, y_a) = 0$, abermals zur Bestimmung der beiden durch Integration der allgemeinen Gleichung (I.) eingehenden willkührlichen Constanten C und C_1 dienen wird.

Verfolgt man nun weiter die Zergliederung des (§. 69.), so findet sich, wenn man in der dortigen (nro. 5. und 6.) die letzten beiden Glieder theilweise integrirt, vermöge der Gleichung (§. 68. I.) jetzt als aggregirenden Theil von $\delta^2(U_{b+a})$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b \cdot (\delta^2 y)_b - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a \cdot (\delta^2 y)_a,$$

welcher Ausdruck nun nicht Null ist, um welchen also der Ausdruck für $\delta^2(U_{b+a})$ in (8. des §. 69.) noch vermehrt werden muß. — Eliminirt man aber aus ihm das $(\delta^2 y)_a$ mittelst der Gleichung (2.), nehmlich $\delta^2\varphi = 0$, so erhält man, diese mit λ multiplicirend und zu dem vorgedachten Ausdrucke

addirend, wenn λ den aus (4. und 5.) zu findenden constanten Werth hat:

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (y_b)^2} \cdot (\delta y)^2_b + 2\lambda \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (y_b) \cdot \partial (y_a)} \cdot (\delta y)_b \cdot (\delta y)_a + \lambda \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (y_a)^2} \cdot (\delta y)^2_a$$

(während $(\delta y)_a$ noch immer, wo es vorkommt, mittelst der Gleichung (1.) eliminirt werden muß), um welchen Ausdruck also das $\delta^2(U_{b \div a})$ in (8. des §. 69.) zu vermehren ist. — Der nun folgende Theil der Untersuchung des (§. 69.) behält aber jetzt seine volle Gültigkeit, so daß man auch hier wieder genau zu demselben Resultat gelangt, wie im (§. 69.) selbst.

In dem andern Falle (B) der Aufgabe dagegen sind, da y_b, y_a unverändert bleiben sollen, die Ausdrücke

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\delta^2 y)_b$, $(\delta^2 y)_a$ etc. etc. alle der Null gleich. Die Grenzgleichung (§. 68. II.) wird deshalb identisch $0=0$, und es bleibt nur noch die allgemeine Gleichung (I. §. 68.), welche integrirt y in x mit zwei willkührlichen Constanten C und C_1 giebt, während jetzt diese Constanten durch die Gleichungen $\varphi(y_b, y_a)=0$, $\varphi_1(y_b, y_a)=0$, oder durch die aus diesen Gleichungen hervorgehenden bestimmten Werthe für y_b und y_a ihre Bestimmung erhalten.

Verfolgt man ferner die Untersuchung des (§. 69.) auch für diesen Fall, so werden jetzt alle in (8. des §. 69.) außerhalb des $\int$ Zeichens zu stehen kommende Glieder (wegen $(\delta y)_b=0$, $(\delta y)_a=0$, etc. etc.) von selbst verschwinden, und man erhält also das (§. 69.) gefundene Resultat auch hier unverändert wieder.

Was zuletzt den Fall (C.) der Aufgabe betrifft, so ist er von dem Falle (B.) nur darin verschieden, daß die Constanten C und C_1 ganz unbestimmt bleiben, und vielleicht noch durch andere Bedingungen der Aufgabe selbst bestimmt werden.

Beispiele. A) Wenn die Summe der zu $x=a$ und $x=b$ gehörigen Ordinaten einer für das Maximum oder Minimum gesuchten Curve beständig dieselbe bleiben und $=c$ gegeben seyn soll. — B) Wenn die gesuchte Curve durch zwei gegebene Punkte gehen soll, deren Abscissen a und b sind. —

C) Wenn die Curve durch 2 andere gegebene nicht zu den Abscissen a und b gehörige Punkte durchgehen, jede der zu $x = a$, $x = b$ gehörigen Ordinaten aber beständig dieselbe bleiben soll.

§. 71. Zusatz 3.

Statt der einen oder der andern Bedingung des (§. 70.) konnte auch die Bedingung gegeben seyn, daß entweder eine Funktion $\varphi(y_b, y_a)$ oder zwei solche Funktionen $\varphi(y_b, y_a)$ und $\varphi_1(y_b, y_a)$ unverändert bleiben sollen, ohne daß diese Funktionen gerade Null, oder der Werth von y_b oder y_a gerade gegeben wäre. Dann bleibt alles offenbar genau so wie vorher im (§. 70.) selbst, weil man hier noch immer die Gleichungen hat $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta^2\varphi_1 = 0$ etc., nur mit dem Unterschiede, daß weil die Gleichungen $\varphi = 0$, oder $\varphi = 0$ und $\varphi_1 = 0$ hier nicht existiren, im ersten Falle eine im andern Falle beide der in y aus (§. 68. I.) eingehenden willkührlichen Constanten ganz unbestimmt bleiben werden, und deshalb noch so bestimmt werden können, daß anderen Bedingungen, welche mit der Aufgabe verknüpft werden mögen, noch Genüge geleistet wird. — Hieher gehört auch der Fall (C) des vorhergehenden (§. 70.).

Beispiele. Es werde z. B. als Bedingung für die gesuchte Curve noch hinzugefügt, daß die Summe der beiden zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten beständig auch für alle Nachbar-Curven denselben aber nicht gegebenen Werth behalten soll; oder die Summe und das Produkt zugleich.

§. 72. Zusatz 4.

In allen den Aufgaben (§. 68. und §. §. 70. 71.) wird $U_{b \div a}$ als Maximum oder Minimum eine Funktion von b und a (und nicht mehr von x). Man kann daher b als gegeben ansehen und den Werth von a suchen, oder a als gegeben ansehen und den Werth von b suchen, oder endlich die Werthe von a und von b selber wieder suchen, welche dieses $U_{b \div a}$ (als Funktion von a, oder von b, oder von a und b) zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle, zu den nächst größern und nächst kleinern, durch b_n und

$a_{,,}$ vorgestellten Werthe von b und a, gehörigen Nachbar-Werthe von U_{b+a}; und zwar kann man wiederum wünschen, daß während U_{b+a} in der (§. §. 68. 70. 71.) gedachten Beziehung ein Maximum ist, solches in einer der jetzigen, entweder ebenfalls ein Maximum oder auch ein Minimum werde; und umgekehrt. — Soll aber U_{b+a} in jeder dieser Beziehungen ein Maximum oder in jeder derselben ein Minimum werden, so läßt sich die Aufgabe gleich von vorne herein so stellen.

§. 73. Aufgabe.

Es ist

$$V = f(x, y, y_1) \quad \text{und} \quad U = \int V . \partial x.$$

Man soll diejenige Funktion y von x, und diejenigen Werthe von b und a finden, welche U_{b+a} zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe, welche zu beliebig nächst größern und nächst kleinern Funktionen $y_{,,}$ statt y, und zu beliebig nächst größern und nächst kleinern Grenzwerthen $b_{,,}$, $a_{,,}$ statt b und a, gehören.

Auflösung. Setzt man hier zuerst

$$V_{,,} = f(x, y_{,,}, \partial(y_{,,})) \quad \text{und} \quad U_{,,} = \int (V_{,,}) . \partial x,$$

so werden unsre Nachbar-Werthe von U_{b+a} durch

$$(U_{b+a})_{(,,)} \quad \text{oder} \quad (U_{,,})_{b_{,,}+a_{,,}} \quad \text{ausgedrückt seyn.}$$

Behält man daher die Bezeichnung des (B. §. 29.) bei, so hat man hier

$$1) \; \delta(U_{b+a}) = \delta_1(U_{b+a}) + V_b . \delta b - V_a . \delta a,$$

wo das $\delta_1(U_{b+a})$ hier, das $\delta(U_{b+a})$ des (§. 68.) ist. — Setzt man daher, $\delta(U_{b+a}) = \infty$ übergehend, nach (§. 6.):

$$\delta(U_{b+a}) = 0,$$

so erhält man dieselbe allgemeine Gleichung (I. §. 68.), aber zur Grenzgleichung

$$\text{II.} \; \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b . (\delta y)_b - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a . (\delta y)_a + V_b . \delta b - V_a . \delta a = 0,$$

welche jetzt, so lange $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, δb, δa von einander ganz unabhängig sind, in die 4 Gleichungen

$$2)\ \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a = 0,\ V_b = 0,\ V_a = 0$$

zerfällt; und diese letzteren dienen dann im Allgemeinen zur Bestimmung der beiden aus (I.) eingehenden willkührlichen Constanten, so wie der beiden gesuchten Werthe b und a.

§. 74. Zusatz 1.

Sind aber außerdem noch Bedingungen gegeben, wie (§. §. 70—72), welche von den Werthen von y erfüllt seyn sollen, oder ist noch eine Gleichung

$$\psi(b, a) = 0\ ^{*})$$

gegeben, welche zwischen allen angrenzenden Werthen von b und a ebenfalls statt finden soll, so daß auch seyn muß

$\psi(b_x, a_x) = 0$; oder sind endlich überhaupt Gleichungen gegeben von der Form $\varphi(y_b, y_a, b, a) = 0$, etc. etc. welche zwischen den nächstangrenzenden Werthen noch statt finden sollen, so daß man noch hat

$$\varphi((y_x)_{b_x}, (y_x)_{a_x}, b_x, a_x) = 0, \text{ etc. etc.},$$

wo b_x und a_x Werthe von x sind, so hat man noch immer Gleichungen $\delta\psi = 0$, etc. etc. oder $\delta\varphi = 0$, etc. etc., welche zwischen δb und δa, oder zwischen $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, δb und δa, eine oder mehrere Abhängigkeiten festsetzen, so daß die einen dieser letztern Ausdrücke durch die übrigen als gegeben angesehen werden müssen; und man wird solche aus der Grenzgleichung (II.) eliminiren, und die Grenzgleichung wird dann jedesmal nur noch in so viele einzelne zerfallen, als von den Ausdrücken $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, δb, δa noch unabhängig geblieben sind. — Diese letzterwähnten Gleichungen, welche aus der Grenzgleichung (II.) hervorgehen, kann man nachgehends mit den gegebenen Gleichungen $\psi = 0$ oder $\varphi = 0$, etc. etc. verbinden, um sowohl die aus der allge-

*) Wenn z. B. die Differenz der Abscissen b—a, also der Abstand der beiden parallelen Coordinaten zwischen denen das Maximum oder Minimum liegen soll, einen bestimmten und gegebenen Werth c hat.

meinen Gleichung (I.) eingehenden beiden Constanten, als auch die Werthe b und a selbst zu bestimmen. (Vergl. sorgfältig (E. §. 94.)).

Um in der Folge bei den zusammengesetztern Aufgaben, gerade diesen Punkt nicht immer weitläufig wiederholen zu müssen, wollen wir lieber hier sogleich in noch näheres Detail eingehen. —

A) Sey also erstlich noch gegeben die Gleichung

$$1)\quad \varphi(y_b, y_a, b, a)=0,$$

welche von allen Nachbar-Werthen y_x von y und b_x, a_x von b und a, ebenfalls erfüllt werden soll, so hat man (V. §. 35.):

$$\delta\varphi=0$$

oder $$2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}.(\delta y)_b+\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}.(\delta y)_a+\frac{\partial\varphi}{\partial b}.\delta b+\frac{\partial\varphi}{\partial a}.\delta a=0,\ ^{*)}$$

durch welche Gleichung z. B. δa in $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$ und δb als gegeben, die 3 letztern Ausdrücke aber als von einander ganz unabhängig angesehen werden können. Eliminirt man daher aus obiger Grenzgleichung (§. 73. II.) dieses δa, so zerfällt diese Gleichung wegen der Willkührlichkeit von $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$ und δb in noch 3 Gleichungen nehmlich:

$$3)\quad \frac{\partial V}{\partial(y_b)}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}=0$$

$$4)\quad -\frac{\partial V}{\partial(y_a)}+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}=0$$

---

*) Es kann eine solche Gleichung $\varphi=0$ unter der Voraussetzung wie hier gegeben seyn, nehmlich daß auch noch

$$\varphi((y_x)_{b_x}, (y_x)_{a_x}, b_x, a_x)=0$$

seyn soll, oder sie könnte auch unter der Voraussetzung gegeben seyn, daß nur

$$\varphi((y_x)_b, (y_x)_a, b_x, a_x)=0$$

noch existiren soll. In letzterm Falle müßte in (2.) statt $\frac{\partial\varphi}{\partial b}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ bloß $\frac{\partial\varphi}{\partial b}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ gesetzt werden.

sie sich erfüllt findet, allemal das $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ von V, in der gegebenen Beziehung, anzeigt.

Ist aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}=0$ für jeden Werth von x (wenigstens zwischen a und b) und zugleich auch $N=\frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial y_1}=0$ für jeden solchen Werth von x, so ist der unter dem $\int$ Zeichen stehende Ausdruck in (8.) nothwendig allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, wenn M d. h. $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, für jeden Werth von x zwischen a und b, und es ist dann U abermals ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$. *)

Ob aber, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$ weder Null, noch beständig für jeden Werth von x zwischen a und b einerlei Zeichen behält, dies allemal anzeige, daß nun U weder ein Maximum noch ein Minimum seyn könne, bedarf jedesmal noch eines besonderen Nachweises.

Zu gleicher Zeit darf nicht übersehen werden, daß hier, so wie in der Folge immer, $b > a$ angenommen wird.

Anmerkung. Das hier befolgte Verfahren fällt vielleicht noch deutlicher in die Augen, wenn man bemerken will, daß δy jede mögliche Funktion von x vorstellt (die höchstens noch einigen (später) gegebenen Bedingungen genügen soll), daß man daher dies δy nebst seinen Ableitungen so viel wie möglich außerhalb des Integralzeichens brin-

---

*) In der: Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung. Berlin 1823 p. 115. findet man die Meinung ausgesprochen, daß $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}=0$ allemal anzeige, daß nun U weder ein Maximum noch ein Minimum seyn könne.

gen muß, weil die Integration selbst, so lange unter dem Integralzeichen noch ganz unbestimmte und willkührliche Funktionen von x stehen, auf keine Weise von statten gehen kann.

§. 70. Zusatz 2.

Man kann auch der Aufgabe (§. 68.) noch mehrere neue Bedingungen hinzufügen. Es kann nehmlich

A) eine Gleichung $\varphi(y_b, y_a)=0$ gegeben seyn, so daß nur unter allen denjenigen nächstangrenzenden Werthen von y, welche für $x=b$ und $x=a$ (an den Grenzen), dieser Gleichung $\varphi=0$ genügen, das Maximum oder Minimum von V verlangt wird; — dann können

B) zwei solche Gleichungen

$$\varphi(y_b, y_a)=0, \qquad \varphi_1(y_b, y_a)=0$$

(an den Grenzen), d. h. hier y_b und y_a selbst völlig bestimmt gegeben seyn; so daß nur unter denjenigen nächstangrenzenden Werthen von y das Maximum oder Minimum von V gesucht wird, welche an den Grenzen (d. h. für $x=b$ und für $x=a$) beständig dieselben völlig bestimmt gegebenen Werthe behalten; endlich können

C) der Grenzwerth y_b oder der andere y_a oder beide, zwar nicht gegeben seyn, aber doch beständig dieselben bleiben sollen.

Im ersten Falle (A), wenn sowohl $\varphi(y_b, y_a)=0$ als auch $\varphi((y_\prime)_b, (y_\prime)_a)=0$ seyn soll, hat man auch $\delta\varphi=0$ und $\delta^2\varphi=0$, oder

$$1)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}\cdot(\delta y)_b+\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}\cdot(\delta y)_a=0,$$

$$2)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial(y_b)^2}\cdot(\delta y)^2_b+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial(y_b)\cdot\partial(y_a)}\cdot(\delta y)_b\cdot(\delta y)_a+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(y_a)^2}\cdot(\delta y)^2_a$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}\cdot(\delta^2 y)_b+\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}\cdot(\delta^2 y)_a=0,$$

wo $\delta(y_b)=(\delta y)_b$ und $\delta^2(y_b)=(\delta^2 y)_b$ u. s. w. ist.

Verfolgt man nun die Auflösung des (§. 68.), so findet man dieselbe allgemeine Gleichung (I.), eben so dieselbe Grenzgleichung (II.) nehmlich (E. §. 94.):

$$3)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b \cdot \delta y_b - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a \cdot (\delta y)_a = 0,$$

jedoch mit dem Unterschiede, daß sie nicht für jedes δy_b und δy_a, sondern nur für diejenigen δy_b, δy_a gilt, welche noch der hiesigen Gleichung (1.) entsprechen.

Eliminirt man daher δy_a, aus den Gleichungen (1.) und (3.), so erhält man nach (E. §. 1.):

$$4)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_b)} = 0,$$

unter der Voraussetzung daß

$$5)\quad -\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_a)} = 0$$

zur Bestimmung von λ dient. So wie also aus diesen beiden Gleichungen λ weggeschafft wird, so erhält man die Gleichung, welche hier an die Stelle der Gleichungen (3. und 4. des §. 68.) tritt, und welche in Verbindung mit der gegebenen Gleichung $\varphi(y_b, y_a) = 0$, abermals zur Bestimmung der beiden durch Integration der allgemeinen Gleichung (I.) eingehenden willkührlichen Constanten C und C_1 dienen wird.

Verfolgt man nun weiter die Zergliederung des (§. 69.), so findet sich, wenn man in der dortigen (nro. 5. und 6.) die letzten beiden Glieder theilweise integrirt, vermöge der Gleichung (§. 68. I.) jetzt als aggregirenden Theil von $\delta^2(U_{b+a})$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b \cdot (\delta^2 y)_b - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a \cdot (\delta^2 y)_a,$$

welcher Ausdruck nun nicht Null ist, um welchen also der Ausdruck für $\delta^2(U_{b+a})$ in (8. des §. 69.) noch vermehrt werden muß. — Eliminirt man aber aus ihm das $(\delta^2 y)_a$ mittelst der Gleichung (2.), nehmlich $\delta^2\varphi = 0$, so erhält man, diese mit λ multiplicirend und zu dem vorgedachten Ausdrucke

addirend, wenn λ den aus (4. und 5.) zu findenden constanten Werth hat:

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial(y_b)^2} \cdot (\delta y)^2_b + 2\lambda \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial(y_b) \cdot \partial(y_a)} \cdot (\delta y)_b \cdot (\delta y)_a + \lambda \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial(y_a)^2} \cdot (\delta y)^2_a$$

(während $(\delta y)_a$ noch immer, wo es vorkommt, mittelst der Gleichung (1.) eliminirt werden muß), um welchen Ausdruck also das $\delta^2(U_{b \div a})$ in (8. des §. 69.) zu vermehren ist. — Der nun folgende Theil der Untersuchung des (§. 69.) behält aber jetzt seine volle Gültigkeit, so daß man auch hier wieder genau zu demselben Resultat gelangt, wie im (§. 69.) selbst.

In dem andern Falle (B) der Aufgabe dagegen sind, da y_b, y_a unverändert bleiben sollen, die Ausdrücke

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\delta^2 y)_b$, $(\delta^2 y)_a$ etc. etc. alle der Null gleich. Die Grenzgleichung (§. 68. II.) wird deshalb identisch $0=0$, und es bleibt nur noch die allgemeine Gleichung (I. §. 68.), welche integrirt y in x mit zwei willkührlichen Constanten C und C_1 giebt, während jetzt diese Constanten durch die Gleichungen $\varphi(y_b, y_a)=0$, $\varphi_1(y_b, y_a)=0$, oder durch die aus diesen Gleichungen hervorgehenden bestimmten Werthe für y_b und y_a ihre Bestimmung erhalten.

Verfolgt man ferner die Untersuchung des (§. 69.) auch für diesen Fall, so werden jetzt alle in (8. des §. 69.) außerhalb des $\int$ Zeichens zu stehen kommende Glieder (wegen $(\delta y)_b=0$, $(\delta y)_a=0$, etc. etc.) von selbst verschwinden, und man erhält also das (§. 69.) gefundene Resultat auch hier unverändert wieder.

Was zuletzt den Fall (C.) der Aufgabe betrifft, so ist er von dem Falle (B.) nur darin verschieden, daß die Constanten C und C_1 ganz unbestimmt bleiben, und vielleicht noch durch andere Bedingungen der Aufgabe selbst bestimmt werden.

Beispiele. A) Wenn die Summe der zu $x=a$ und $x=b$ gehörigen Ordinaten einer für das Maximum oder Minimum gesuchten Curve beständig dieselbe bleiben und $=c$ gegeben seyn soll. — B) Wenn die gesuchte Curve durch zwei gegebene Punkte gehen soll, deren Abscissen a und b sind. —

C) Wenn die Curve durch 2 andere gegebene nicht zu den Abscissen a und b gehörige Punkte durchgehen, jede der zu $x = a$, $x = b$ gehörigen Ordinaten aber beständig dieselbe bleiben soll.

§. 71. Zusatz 3.

Statt der einen oder der andern Bedingung des (§. 70.) konnte auch die Bedingung gegeben seyn, daß entweder eine Funktion $\varphi(y_b, y_a)$ oder zwei solche Funktionen $\varphi(y_b, y_a)$ und $\varphi_1(y_b, y_a)$ unverändert bleiben sollen, ohne daß diese Funktionen gerade Null, oder der Werth von y_b oder y_a gerade gegeben wäre. Dann bleibt alles offenbar genau so wie vorher im (§. 70.) selbst, weil man hier noch immer die Gleichungen hat $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$; etc. $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta^2\varphi_1 = 0$ etc., nur mit dem Unterschiede, daß weil die Gleichungen $\varphi = 0$, oder $\varphi = 0$ und $\varphi_1 = 0$ hier nicht existiren, im ersten Falle eine im andern Falle beide der in y aus (§. 68. I.) eingehenden willkührlichen Constanten ganz unbestimmt bleiben werden, und deshalb noch so bestimmt werden können, daß anderen Bedingungen, welche mit der Aufgabe verknüpft werden mögen, noch Genüge geleistet wird. — Hieher gehört auch der Fall (C) des vorhergehenden (§. 70.).

Beispiele. Es werde z. B. als Bedingung für die gesuchte Curve noch hinzugefügt, daß die Summe der beiden zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten beständig auch für alle Nachbar-Curven denselben aber nicht gegebenen Werth behalten soll; oder die Summe und das Produkt zugleich.

§. 72. Zusatz 4.

In allen den Aufgaben (§. 68. und §. §. 70. 71.) wird $U_{b \div a}$ als Maximum oder Minimum eine Funktion von b und a (und nicht mehr von x). Man kann daher b als gegeben ansehen und den Werth von a suchen, oder a als gegeben ansehen und den Werth von b suchen, oder endlich die Werthe von a und von b selber wieder suchen, welche dieses $U_{b \div a}$ (als Funktion von a, oder von b, oder von a und b) zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle, zu den nächst größern und nächst kleinern, durch b_x und

$a_{,,}$ vorgestellten Werthe von b und a, gehörigen Nachbar-Werthe von $U_{b \div a}$; und zwar kann man wiederum wünschen, daß während $U_{b \div a}$ in der (§. §. 68. 70. 71.) gedachten Beziehung ein Maximum ist, solches in einer der jetzigen, entweder ebenfalls ein Maximum oder auch ein Minimum werde; und umgekehrt. — Soll aber $U_{b \div a}$ in jeder dieser Beziehungen ein Maximum oder in jeder derselben ein Minimum werden, so läßt sich die Aufgabe gleich von vorne herein so stellen.

§. 73. Aufgabe.

Es ist

$$V = f(x, y, y_1) \quad \text{und} \quad U = \int V . \partial x.$$

Man soll diejenige Funktion y von x, und diejenigen Werthe von b und a finden, welche $U_{b \div a}$ zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle diejenigen Nachbar-Werthe, welche zu beliebig nächst größern und nächst kleinern Funktionen $y_{,,}$ statt y, und zu beliebig nächst größern und nächst kleinern Grenzwerthen $b_{,,}$, $a_{,,}$ statt b und a, gehören.

Auflösung. Setzt man hier zuerst

$$V_{,,} = f(x, y_{,,}, \partial(y_{,,})) \quad \text{und} \quad U_{,,} = \int (V_{,,}) . \partial x,$$

so werden unsre Nachbar-Werthe von $U_{b \div a}$ durch

$$(U_{b \div a})_{(,,)} \quad \text{oder} \quad (U_{,,})_{b_{,,} \div a_{,,}}$$ ausgedrückt seyn.

Behält man daher die Bezeichnung des (B. §. 29.) bei, so hat man hier

$$1) \; \delta(U_{b \div a}) = \delta_1(U_{b \div a}) + V_b . \delta b - V_a . \delta a,$$

wo das $\delta_1(U_{b \div a})$ hier, das $\delta(U_{b \div a})$ des (§. 68.) ist. — Setzt man daher, $\delta(U_{b \div a}) = \infty$ übergehend, nach (§. 6.):

$$\delta(U_{b \div a}) = 0,$$

so erhält man dieselbe allgemeine Gleichung (I. §. 68.), aber zur Grenzgleichung

$$\text{II.} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b . (\delta y)_b - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a . (\delta y)_a + V_b . \delta b - V_a . \delta a = 0,$$

welche jetzt, so lange $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, δb, δa von einander ganz unabhängig sind, in die 4 Gleichungen

$$2)\ \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a = 0,\ V_b = 0,\ V_a = 0$$

zerfällt; und diese letzteren dienen dann im Allgemeinen zur Bestimmung der beiden aus (I.) eingehenden willkührlichen Constanten, so wie der beiden gesuchten Werthe b und a.

§. 74. Zusatz 1.

Sind aber außerdem noch Bedingungen gegeben, wie (§. §. 70—72), welche von den Werthen von y erfüllt seyn sollen, oder ist noch eine Gleichung

$$\psi(b, a) = 0\ *)$$

gegeben, welche zwischen allen angrenzenden Werthen von b und a ebenfalls statt finden soll, so daß auch seyn muß

$\psi(b_x, a_x) = 0$; oder sind endlich überhaupt Gleichungen gegeben von der Form $\varphi(y_b, y_a, b, a) = 0$, etc. etc. welche zwischen den nächstangrenzenden Werthen noch statt finden sollen, so daß man noch hat

$$\varphi((y_x)_{b_x}, (y_x)_{a_x}, b_x, a_x) = 0,\ \text{etc. etc.},$$

wo b_x und a_x Werthe von x sind, so hat man noch immer Gleichungen $\delta\psi = 0$, etc. etc. oder $\delta\varphi = 0$, etc. etc., welche zwischen δb und δa, oder zwischen $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, δb und δa, eine oder mehrere Abhängigkeiten festsetzen, so daß die einen dieser letztern Ausdrücke durch die übrigen als gegeben angesehen werden müssen; und man wird solche aus der Grenzgleichung (II.) eliminiren, und die Grenzgleichung wird dann jedesmal nur noch in so viele einzelne zerfallen, als von den Ausdrücken $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, δb, δa noch unabhängig geblieben sind. — Diese letzterwähnten Gleichungen, welche aus der Grenzgleichung (II.) hervorgehen, kann man nachgehends mit den gegebenen Gleichungen $\psi = 0$ oder $\varphi = 0$, etc. etc. verbinden, um sowohl die aus der allge-

---

*) Wenn z. B. die Differenz der Abscissen b—a, also der Abstand der beiden parallelen Coordinaten zwischen denen das Maximum oder Minimum liegen soll, einen bestimmten und gegebenen Werth c hat.

meinen Gleichung (I.) eingehenden beiden Constanten, als auch die Werthe b und a selbst zu bestimmen. (Vergl. sorgfältig (E. §. 94.)).

Um in der Folge bei den zusammengesetztern Aufgaben, gerade diesen Punkt nicht immer weitläufig wiederholen zu müssen, wollen wir lieber hier sogleich in noch näheres Detail eingehen. —

A) Sey also erstlich noch gegeben die Gleichung

$$1)\quad \varphi(y_b, y_a, b, a) = 0,$$

welche von allen Nachbar-Werthen y_x von y und b_x, a_x von b und a, ebenfalls erfüllt werden soll, so hat man (V. §. 35.):

$$\delta\varphi = 0$$

oder $$2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}.(\delta y)_b + \frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}.(\delta y)_a + \frac{\partial\varphi}{\partial b}.\delta b + \frac{\partial\varphi}{\partial a}.\delta a = 0, \text{*)}$$

durch welche Gleichung z. B. δa in $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$ und δb als gegeben, die 3 letztern Ausdrücke aber als von einander ganz unabhängig angesehen werden können. Eliminirt man daher aus obiger Grenzgleichung (§. 73. II.) dieses δa, so zerfällt diese Gleichung wegen der Willkührlichkeit von $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$ und δb in noch 3 Gleichungen nehmlich:

$$3)\quad \frac{\partial V}{\partial(y_b)} + \lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)} = 0$$

$$4)\quad -\frac{\partial V}{\partial(y_a)} + \lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)} = 0$$

---

*) Es kann eine solche Gleichung $\varphi = 0$ unter der Voraussetzung wie hier gegeben seyn, nehmlich daß auch noch

$$\varphi((y_x)_{b_x}, (y_x)_{a_x}, b_x, a_x) = 0$$

seyn soll, oder sie könnte auch unter der Voraussetzung gegeben seyn, daß nur

$$\varphi((y_x)_b, (y_x)_a, b_x, a_x) = 0$$

noch existiren soll. In letzterm Falle müßte in (2.) statt $\frac{\partial\varphi}{\partial b}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ bloß $\frac{\partial\varphi}{\partial b}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ gesetzt werden.

5) $V_b + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$, wenn λ selbst bestimmt ist durch

6) $- V_a + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$.

Eliminirt man daher aus diesen Gleichungen (3—6.) das λ, so erhält man 3 Gleichungen, welche in Verbindung mit der gegebenen Gleichung (1.) zur Bestimmung der beiden mehrerwähnten willkührlichen Constanten, und der beiden Werthe b und a dienen werden.

B) Sind aber zweitens gegeben 2 solche Gleichungen

1) $\varphi = 0$ und 2) $\varphi_1 = 0$,

so hat man

$$\delta\varphi = 0$$

oder 3) $\frac{\partial \varphi}{\partial (y_b)} . (\delta y)_b + \frac{\partial \varphi}{\partial (y_a)} . (\delta y)_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} . \delta b + \frac{\partial \varphi}{\partial a} . \delta a = 0$

und

$$\delta\varphi_1 = 0$$

oder 4) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_b)} . (\delta y)_b + \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_a)} . (\delta y)_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} . \delta b + \frac{\partial \varphi}{\partial a} . \delta a = 0$.

Durch diese Gleichungen kann man zwei von den 4 Ausdrücken $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, δb, δa, als gegeben, die beiden andern als völlig willkührlich ansehen; und eliminirt man daher zwei derselben aus der Grenzgleichung (II. §. 73.), so zerfällt sie noch in 2 andere, nehmlich in

5) $\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (y_b)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_b)} = 0$,

6) $-\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (y_a)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_a)} = 0$,

wenn λ und λ_1 gegeben sind durch die Gleichungen

7) $V_b + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial b} = 0$,

8) $- V_a + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} = 0$.

Eliminirt man also λ und λ_1 aus diesen 4 Gleichungen (5—8.) und verbindet das Resultat mit den Gleichungen (1. und 2.), so hat man wiederum 4 Gleichungen, welche zur Bestimmung der 4 fraglichen Unbekannten dienen werden.

C) Sind endlich drittens 3 solche Gleichungen gegeben:

1) $\varphi = 0$, 2) $\varphi_1 = 0$, 3) $\varphi_2 = 0$

zwischen y_b, y_a, b und a, so daß das Maximum oder Minimum von V nur in Bezug auf diejenigen nächstangrenzenden Werthe von y und von b und von a, statt finden soll, welche diesen Gleichungen genügen; so hat man

$\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 = 0$, und dadurch 3 der 4 Ausdrücke $(\delta y)_a$, $(\delta y)_b$, δb, δa, durch den 4ten gegeben. Eliminirt man daher aus der Grenzgleichung (§. 73. II.) diese 3 Ausdrücke, so erhält man:

$$4) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_b + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_b)} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_b)} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial (y_b)} = 0,$$

wenn λ, λ_1 und λ_2 bestimmt sind durch die Gleichungen

$$5) \; -\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_a + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_a)} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_a)} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial (y_a)} = 0$$

$$6) \quad V_b + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial b} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial b} = 0$$

$$7) \; -V_a + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial a} = 0.$$

So wie daher aus diesen Gleichungen (4—7.) die 3 Ausdrücke λ, λ_1, λ_2 weggeschafft werden, so erhält man eine Gleichung, welche in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen (1—3.) zur Bestimmung der Unbekannten b und a, und der beiden aus der allgemeinen Gleichung (I. §. 68. oder §. 73.) durch Integration eingehenden willkührlichen Constanten dienen werden.

D) Wären endlich 4 solche Gleichungen

$$\varphi = 0, \; \varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0, \; \varphi_3 = 0$$

gegeben, so würde

$$(\delta y)_b = (\delta y)_a = \delta b = \delta a = 0$$

seyn (schon weil dann y_b, y_a, b, a völlig bestimmte und gegebene Werthe hätten), und die Grenzgleichung wäre dann von selbst erfüllt. Die aus (I.) eingehenden Constanten würden dann durch die beiden gegebenen Werthe y_b und y_a ihre Bestimmung erhalten, und b und a wären ohnedies gegeben, so daß dieser Fall eigentlich nicht mehr zu unserer hiesigen, sondern zu der Aufgabe des (§. 68.) oder vielmehr (§. 70.) gehört.

Anmerkung. Aehnliche Bemerkungen wie die eben gemachte, würden statt finden, wenn weniger Gleichungen gegeben wären, aber z. B. zweie von der besondern Form $\varphi(b, a)=0$ und $\varphi_1(b, a)=0$, wo dann ebenfalls a und b völlig bestimmt, und δa, δb Null seyn würden.

Beispiel. Soll z. B. die kürzeste Linie gesucht werden von einem gegebenen Punkt nach einer durch eine Gleichung $\varphi(x', y')=0$ gegebenen Curve, so ist an dem Durchschnittspunkt der gesuchten Linie mit der gegebenen Curve $x'=b$ und $y'=y_b$, wenn x, y die Coordinaten sind der gesuchten kürzesten Linie; so daß man hier hat die Gleichung $\varphi(b, y_b)=0$. — Soll dagegen die kürzeste Linie gesucht, werden zwischen zwei gegebenen Linien $\varphi(x', y')=0$ und $\varphi_1(x'', y'')=0$, so hat man $x'=b$, $y'=y_b$, und $x''=a$ und $y''=y_a$; und man hat dann die beiden Grenzgleichungen

$$\varphi(b, y_b)=0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(a, y_a)=0.$$

Es kann dann auch noch die Bedingung gemacht seyn, daß die Differenz $b-a$ einen bestimmten Werth c haben soll, welche Gleichung $b-a-c=0$ statt $\varphi_2(b, a)=0$ zu nehmen wäre.

§. 75. Zusatz 2.

Statt der gegebenen Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. kann bloß die Bedingung gegeben seyn, daß die Funktionen

$$\varphi(y_b, y_a, b, a), \quad \varphi_1, \text{ etc. etc.}$$

unverändert bleiben sollen, für alle die nächstangrenzenden Werthe von y, von b und von a. Dann blieben die Gleichungen $\delta\varphi=0$, $\delta\varphi_1=0$, etc. noch immer, und daher alles genau wie im (§. 74.) selbst, nur mit dem Unterschiede, daß, da die Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. nun nicht gegeben sind, von den unbekannten Werthen b und a und von den beiden in y eingegangenen willkührlichen Constanten so viele ganz unbestimmt bleiben würden, als Glei-

chungen zu ihrer Bestimmung fehlen. — Deshalb kann dann auch noch andern vorhandenen Bedingungen der Aufgabe genügt werden, so daß dadurch diese unbestimmt gebliebenen Constanten ihre Bestimmung erhalten.

§. 76. Zusatz 3.

In allen den Fällen (§. §. 73. 74.) erhält man immer nur die Werthe von y, b und a, welche $\delta(U_{b \div a})=0$ machen; und es hängt daher von $\delta^2(U_{b \div a}) \left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ noch ab, ob U selbst in den angegebenen Beziehungen ein $\left\{ \begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix} \right\}$ seyn wird, für diese gefundene Funktion y und für diese gefundenen Werthe von b und von a. — Es ist aber unter den Voraussetzungen des (§. 73.) nach (B. §. 29.):

$$1)\ \delta^2(U_{b \div a}) = \delta_1^2(U_{b \div a}) + 2(\delta_1 V)_b . \delta b - 2(\delta_1 V)_a . \delta a + \\ + (\partial V)_b . \delta b^2 - (\partial V)_a . \delta a^2 + V_b . \delta^2 b - V_a . \delta^2 a,$$

wo $2)\ \delta_1^2(U_{b \div a}) = \int_{b \div a} \delta_1^2 V . \partial x$ ist, während das $\delta_1^2 V$ genau die Bedeutung des $\delta^2 V$ (§. 68. Aufl. n. 2.) hat. — Verfolgt man daher die Schlüsse des (§. 69.) in jedem einzelnen der (§. 73. oder §. 74.) berührten Fälle, so wird man jedesmal dasselbe Resultat erhalten, daß nehmlich das $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$ von V existiren wird, so oft $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b ein und dasselbe Zeichen behält und zwar allemal $\left\{ \begin{matrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{matrix} \right\}$ ist.

Anmerkung. Wir wollen nun dieselben Aufgaben (§. §. 68—76.) für den zusammengesetztern Fall vornehmen, wo in V auch noch y_2 oder $\partial^2 y$ oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eingeht.

§. 77. Aufgabe.

Es ist gegeben

$$V = f(x, y, y_1, y_2) \quad \text{und} \quad U = \int V . \partial x.$$

Man soll diejenige Funktion y von x finden, welche in Be-

zug auf alle nächst größern und nächst kleinern Werthe y_x von y dies $U_{b \div a}$ zu einem Maximum oder Minimum macht. *)

Auflösung. Hier sind die zu y_x gehörigen Werthe von V und von U

$$V_x = f(x, y_x, \partial(y_x), \partial^2(y_x)) \quad \text{und} \quad U_x = \int(V_x)\cdot\partial x,$$

und nach (B. §. §. 5. 6. oder B. §. 9.):

$$1)\ \delta V = \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\partial\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\partial^2\delta y,$$

$$2)\ \delta U = \int(\delta V)\cdot\partial x,$$

oder, wenn man theilweise integrirt (E. §. §. 60. 62. oder B. §. 11.):

$$3)\ \delta(U_{b \div a}) = \int_{b \div a}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \partial\frac{\partial V}{\partial y_1} + \partial^2\frac{\partial V}{\partial y^2}\right)\cdot\delta y\cdot\partial x +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\cdot\delta y + \frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\partial\delta y\right]_{b \div a}$$

Setzt man daher nach (§. 6.), $\delta(U_{b \div a}) = \infty$ übergehend, $\delta(U_{b \div a}) = 0$, so erhält man nach (E. §. 93.):

$$\text{I.}\quad \frac{\partial V}{\partial y} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) + \partial^2\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right) = 0,$$

welche wiederum die **allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums** ist, in der Regel von der 4ten Ordnung seyn wird, und integrirt, y in x mit 4 willkührlichen Constanten liefert; dann noch die **Grenzgleichung**:

$$\text{II.}\quad \psi_b\cdot\delta y_b - \psi_a\cdot\delta y_a + \psi'_b\cdot(\partial\delta y)_b - \psi'_a\cdot(\partial\delta y)_a = 0,$$

wenn $\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right) = \psi$ und $\frac{\partial V}{\partial y_2} = \psi'$ gesetzt wird.

Diese Grenzgleichung zerfällt jetzt, wo keine weiteren Bedingungen gegeben sind, wegen der Willkührlichkeit von

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_a$ in die 4 Gleichungen

---

*) Hieher gehören die Beispiele (n. n. 49. 51 — 55. und 71.) der Methodus inv. lin. curv. max. min. etc. etc. Cap. II.; auch (n. 8. des IV. Kap.).

4) $\psi_b=0$, $\psi_a=0$, $\psi'_b=0$, $\psi'_a=0$,
welche zur Bestimmung der vorhin erwähnten 4 Constanten dienen werden.

§. 78. Zusatz 1.

Sind noch Bedingungen hinzugefügt, so daß nicht unter allen möglichen angrenzenden Werthen y_x, das Maximum oder Minimum von V gesucht wird, sondern nur unter denen, welche entweder

1) der Gleichung $\varphi(y_b, y_a, (\partial y)_b, (\partial y)_a)=0$ oder
2) zweien solchen Gleichungen $\varphi=0$ und $\varphi_1=0$, oder
3) dreien solchen Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, oder
4) vier solchen Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$,

genügen, oder endlich für welche

5) eine oder zwei oder 3 oder 4 solche Funktionen φ, φ_1, φ_2, φ_3, ohne Null zu seyn, doch unveränderlich seyn sollen; so hat man noch immer (nach E. §. 94.) dieselbe **allgemeine Gleichung** (I.) und dieselbe **Grenzgleichung** (II.) für das Maximum oder Minimum, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_a$ nicht von einander ganz unabhängig sind, sondern in (1.) nur drei derselben, in (2.) nur zwei derselben, in (3.) nur einer derselben als willkührlich anzusehen ist, während in (4.) alle diese Ausdrücke nothwendig $=0$ seyn müssen, weil die 4 Gleichungen, die in diesem Falle statt finden

$$\delta\varphi=0,\ \delta\varphi_1=0,\ \delta\varphi_2=0,\ \delta\varphi_3=0,$$

diese Nullenwerthe liefern (oder auch, weil die 4 Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$, die Werthe von y_b, y_a, $(\partial y)_b$, $(\partial y)_a$ völlig bestimmen, diese letztern selbst also alle unveränderlich bleiben müssen.).

In jedem dieser 4 Fälle (1—4.) wird man daher so viele der Ausdrücke $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_a$ aus der Grenzgleichung (II.) eliminiren, als solche Gleichungen gegeben sind, und die Grenzgleichung selbst wird dann nur in so viele einzelne zerfallen, als von den Ausdrücken

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_a$ als unabhängig und willkührlich angesehen werden können. Diese Gleichungen in Verbindung mit den gegebenen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$ etc. etc. werden aber dann im Allgemeinen allemal die 4 aus der Integration von (I.) eingehenden willkührlichen Constanten bestimmen.

Der Fall (5.) endlich zerfällt wieder in 4 Unterfälle, und liefert genau dieselben Resultate, wie beziehlich die eben betrachteten 4 Fälle, jedoch mit dem Unterschiede, daß da zu den aus der Grenzgleichung (II.) jedesmal hervorgehenden Gleichungen hier nicht noch alle die Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. selbst existiren, daher einige der in (I.) eingehenden willkührlichen Constanten ganz unbestimmt bleiben und so bestimmt werden können, daß noch andern zur Aufgabe hinzutretenden Bedingungen genügt wird.

Wir wollen hier noch für die ersten 4 Fälle die Resultate herschreiben, welche die Grenzgleichung (II.) jedesmal liefert.

1) Im Falle (1.) nehmlich erhält man aus der Grenzgleichung (II.) die 3 Gleichungen

$$\psi_b+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(y_b)}=0$$

$$-\psi_a+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(y_a)}=0$$

$$\psi'_b+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial y_b)}=0,$$ während λ bestimmt ist durch

$$-\psi'_a+\lambda.\frac{\partial\varphi}{\partial(\partial y_a)}=0,$$

welche 4 Gleichungen nach Elimination von λ, die 3 Gleichungen liefern, die nachgehends mit $\varphi=0$ in Verbindung alle 4 Constanten aus (I.) bestimmen, oder nur 3 derselben, wenn $\varphi=0$ nicht, sondern nur, wie im ersten Falle von (5.) $\delta\varphi=0$ gegeben ist.

2) Im Falle (2.) erhält man aus der Grenzgleichung (II.) die beiden Gleichungen

$$\psi_b + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (y_b)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_b)} = 0$$

und
$$-\psi_a + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (y_a)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_a)} = 0,$$

während λ und λ_1 bestimmt sind durch die Gleichungen

$$\psi'_b + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (\partial y_b)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (\partial y_b)} = 0$$

und
$$-\psi'_a + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (\partial y_a)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (\partial y_a)} = 0,$$

welche 4 Gleichungen, wenn man λ und λ_1 eliminirt, diejenigen beiden Gleichungen liefern, die in Verbindung mit $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, zur Bestimmung aller 4 Constanten aus (I.) dienen, oder einer geringeren Anzahl derselben, wenn z. B. statt einer oder statt beider Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, bloß $\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$ gegeben seyn sollte.

3) Im Falle (3.) erhält man aus der Grenzgleichung (II.) nur die einzige Gleichung

$$\psi_b + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (y_b)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_b)} + \lambda_2 . \frac{\partial \varphi_2}{\partial (y_b)} = 0,$$

wo λ, λ_1 und λ_2 gegeben sind durch die Gleichungen

$$-\psi_a + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (y_a)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (y_a)} + \lambda_2 . \frac{\partial \varphi_2}{\partial (y_a)} = 0$$

$$\psi'_b + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (\partial y_b)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (\partial y_b)} + \lambda_2 . \frac{\partial \varphi_2}{\partial (\partial y_b)} = 0$$

und
$$-\psi'_a + \lambda . \frac{\partial \varphi}{\partial (\partial y_a)} + \lambda_1 . \frac{\partial \varphi_1}{\partial (\partial y_a)} + \lambda_2 . \frac{\partial \varphi_2}{\partial (\partial y_a)} = 0,$$

so daß, wenn man aus diesen 4 Gleichungen λ, λ_1 und λ_2 eliminirt, diejenige Gleichung übrig bleibt, welche in Verbindung mit $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ zur Bestimmung der 4 fraglichen Constanten dienen werden, oder doch einer geringeren Anzahl derselben, wenn eine, zwei oder alle 3 Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, nicht, sondern nur

$\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 = 0$ zur Bedingung gemacht seyn sollten, wie dies letztere in (5.) angenommen wurde.

4) Im Falle (4.) endlich ist die Grenzgleichung identisch $0 = 0$, und aus ihr bleiben die 4 Constanten völlig unbestimmt, wenn sie nicht durch die Gleichungen

$$\varphi = 0,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 0$$ bestimmt werden können.

Anmerkung. Bei jeder solchen Zergliederung versteht sich von selbst, daß in besonderen Aufgaben noch mehre besondere Fälle vorkommen können, welche als in den allgemeinen hier berührten nicht enthalten angesehen werden müssen. Alle solche einzelne besondere Fälle, z. B. wenn die Grenzgleichung durch einen, allen ihren Gliedern gemeinschaftlichen Faktor, also allemal identisch würde, es möchten zwischen

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_a$ noch Gleichungen gegeben seyn, oder nicht, und dergl. mehr, werden aber jedesmal von demjenigen leicht behandelt werden können, welcher die hiesigen Deduktionen vollständig aufgefaßt und gehörig gewürdigt hat, da sie *wesentlich* unter den hier aufgezählten doch eigentlich immer mit begriffen seyn müssen, und in der Regel als Ausnahmsfälle, noch einfacher seyn werden.

§. 79. Zusatz 2.

In allen diesen Aufgaben (§. §. 77. 78.) findet man immer nur die Werthe von y in x, welche $\delta(U_{b \div a}) = 0$ machen. Abgesehen davon, daß dann auch immer noch die Fälle betrachtet werden müssen, für welche $\delta(U_{b \div a}) = \infty$ wird, (§. 6.) (was wir hier jedesmal absichtlich übergehen, da in jeder besondern Aufgabe das Verfahren für diesen Ausnahmsfall ebenfalls keine größeren Schwierigkeiten verursachen kann, sobald man in den Geist der hier betrachteten Methoden gehörig eingedrungen ist) müssen wir nun jedesmal noch $\delta^2 U$ betrachten, um das Maximum vom Minimo unterscheiden zu können.

Es ist aber (B. §. 5. oder B. §. 9.):

$$1)\quad \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_1}.\delta y.\partial\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}.(\partial\delta y)^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_2}.\delta y.\partial^2\delta y + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1.\partial y_2}.\partial\delta y.\partial^2\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}.(\partial^2\delta y)^2 +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta^2 y$$

und

$$2)\quad \delta^2 U = \int(\delta^2 V).\partial x.$$

Integrirt man aber die 3 letzten Glieder von $\delta^2 V$ theilweise nach (E. §. §. 60. 62.), so erhält man zum Resultat, vermöge der Gleichung (I.):

$$(\mathfrak{A}.)\ldots\qquad \psi.\delta^2 y + \psi'.\partial\delta^2 y.$$

Bezeichnet man ferner das, was aus den 6 Ableitungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_1},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y_1.\partial y_2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$$

hervorgeht, wenn für y, y_1, y_2, die früher gefundenen Werthe in x gesetzt werden, beziehlich durch

$$M,\quad N,\quad P,\quad Q,\quad R,\quad S,$$

so ist der andere noch unter dem Integral-Zeichen $\int$ befindliche Theil von $\delta^2 U$ jetzt

$$(\mathfrak{B}.)\ldots\begin{cases}\int(M.\delta y + 2N.\delta y.\partial\delta y + P.(\partial\delta y)^2 + 2Q.\delta y.\partial^2\delta y + \\ \qquad + 2R.\partial\delta y.\partial^2\delta y + S.(\partial^2\delta y)^2)\partial x.\end{cases}$$

Setzt man dieses, um so viel wie möglich außerhalb des Integral-Zeichens zu bringen,

$$(\mathfrak{C}.) = \begin{cases}\alpha.\delta y^2 + 2\beta.\delta y.\partial\delta y + \gamma.(\partial\delta y)^2 + \\ \quad + \int(F.\delta y^2 + 2E.\delta y.\partial\delta y + 2D.\delta y.\partial^2\delta y + \\ \quad + C.(\partial\delta y)^2 + 2B.\partial\delta y.\partial^2\delta y + A.(\partial^2\delta y)^2)\partial x,\end{cases}$$

differentiirt man nachgehends und macht die entstehenden Resultate identisch, so erhält man:

$$3)\begin{cases} F = M - \partial\alpha, & E = N - \alpha - \partial\beta, & C = P - 2\beta - \partial\gamma, \\ D = Q - \beta, & B = R - \gamma, & A = S = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}, \end{cases}$$

während α, β und γ ganz willkührliche Funktionen von x vor-

stellen. Aber eben weil α, β, γ ganz willkührlich genommen werden können, so kann man sie so nehmen, daß

4) $AC - B^2 = 0$, $AF - D^2 = 0$ und $AE - BD = 0$

wird, welches nach (E. §. 11.) die Bedingungen sind, unter welchen

$$F.\delta y^2 + 2E.\delta y.\partial\delta y + 2D.\delta y.\partial^2\delta y + C.(\partial\delta y)^2 + \\ + 2B.\partial\delta y.\partial^2\delta y + A.(\partial^2\delta y)^2$$

mit A für jeden reellen Werth von δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$ einerlei Zeichen hat. — Diese Gleichungen (4.) nehmen aber, wenn man für A, B, C, D, E, F ihre Werthe aus (3.) setzt, folgende Form an:

$$5) \begin{cases} (P - 2\beta - \partial\gamma)S - (R - \gamma)^2 = 0, \\ (M - \partial\alpha)S - (Q - \beta)^2 = 0, \\ (N - \alpha - \partial\beta)S - (Q - \beta)(R - \gamma) = 0 \end{cases}$$

und geben daher α, β und γ als Funktionen von x mit 3 willkührlichen Constanten (E. §. 104.). — Haben nun α, β, γ diese Werthe, so hängt das Zeichen von

$$\int_{b \div a}(F.\delta y^2 + 2E.\delta y.\partial\delta y + 2D.\delta y.\partial^2\delta y + C.(\partial\delta y)^2 + \\ + 2B.\partial\delta y.\partial^2\delta y + A.(\partial^2\delta y)^2).\partial x,$$

davon ab, ob A oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b beständig einerlei Zeichen haben wird, und ist dann mit A oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ zugleich $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$. — Da ferner der vom Integralzeichen $\int$ befreite Theil von $\delta^2(U_{b \div a})$ nach (A. und B.)

$$= [\psi.\delta^2 y + \psi'.\partial\delta^2 y + \alpha.\delta y^2 + 2\beta.\delta y.\partial\delta y + \gamma.(\partial\delta y)^2]_{b \div a}, \quad (D.)$$

so ist leicht einzusehen, daß, welche Veränderung dieser Theil auch noch erleiden mag, nach den in den Aufgaben (§. 78.) noch gegebenen Bedingungen

$$\delta\varphi = 0,\ \delta^2\varphi = 0,\ \delta\varphi_1 = 0,\ \delta^2\varphi_1 = 0, \text{ etc. etc.},$$

(durch welche vielleicht $\delta^2 y$ oder $\partial\delta^2 y$ oder $\partial\delta y$ oder auch noch δy selbst herausfallen oder eliminirt werden können), man sich für jedes, den übrigen gegebenen Bedingungen ent-

sprechende δy, $\delta^2 y$, die in α, β, γ eingehenden noch ganz willkührlichen 3 Constanten allemal so denken kann, daß dieser ganze Theil (D.) von $\delta^2(U_{b\div a})$, der Null gleich wird, oder doch mit dem erstbetrachteten Theil von $\delta^2(U_{b\div a})$ einerlei Zeichen erhält.

Wir gelangen daher auch hier wieder zu dem für alle Aufgaben der (§. §. 77. 78.) gemeinschaftlichen Resultat, daß wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b allemal einerlei Zeichen hat und zwar allemal $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist, dann $U_{b\div a}$ selbst für das gefundene y in der angegebenen Beziehung ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$ seyn wird.

Ob aber umgekehrt, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ für die Werthe von x zwischen a und b verschiedene Zeichen annimmt, dies allemal ein Kennzeichen sey, daß nun die Funktion $U_{b\div a}$ für das gefundene y weder ein Maximum noch ein Minimum seyn könne, bedarf jedesmal noch eines besondern Nachweises.

Wird dagegen A oder S oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ (für jeden Werth von x zwischen a und b) der Null gleich, so wird der Ausdruck

$$M.\delta y^2 + 2N.\delta y.\partial\delta y + 2Q.\delta y.\partial^2\delta y + P.(\partial\delta y)^2 + \\ + 2R.\partial\delta y.\partial^2\delta y + S.(\partial^2\delta y)^2$$

nicht für jeden reellen Werth von δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$ einerlei Zeichen behalten können, wenn nicht auch R und Q (für jeden Werth von x zwischen a und b) Null werden, wo sich dann der Ausdruck auf

$$M.\delta y^2 + 2N.\delta y.\partial\delta y + P.(\partial\delta y)^2$$ reducirt,

und da wird dann wieder geschlossen werden können, daß, wenn P oder $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b

allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, dann U nothwendig ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ seyn müsse; u. s. w. f. *)

Anmerkung. Auch hier bemerke man wieder, daß δy eine ganz beliebige, höchstens noch einigen Bedingungen unterworfene in jedem Falle aber eine ganz unbestimmte, jeden Augenblick anders gedachte Funktion von x seyn soll, und daß man daher an ein Integriren nur unter dieser Voraussetzung denken kann, weshalb eben kein anderer Weg als der hier betretene eingeschlagen werden darf, um doch so viel wie möglich von dem unbestimmten δy außerhalb des $\int$ Zeichens zu bringen. Dieselben Betrachtungen sind aber auch zugleicher Zeit die Grundlagen zur Auffindung der Bedingungen einer unabhängigen Integrabilität, eben weil es hier auch darauf ankommt, zu integriren, während δy eine ganz beliebige Funktion von x bleibt.

§. 80. Aufgabe.

Es ist V und U wie im (§. 77.). Man soll die Werthe von y, a und b suchen, welche U_{b+a} zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf die nächst größern und nächst kleinern Werthe $y_{,}$ von y, und $a_{,}$, $b_{,}$ von a und von b.

Auflösung. Nimmt man hier

$V_{,} = f(x, y_{,}, \partial(y_{,}), \partial^2(y_{,}))$ und $U_{,} = \int(V_{,}) \cdot \partial x$

und noch $(U_{b+a})_{(,)} = (U_{,})_{b_{,}+a_{,}}$, wo $b_{,}$, $a_{,}$ Werthe von x (E. §. 49.) sind, so sind $(U_{b+a})_{(,)}$ die Nachbar-Werthe in Bezug auf welche das Maximum oder Minimum von U gesucht wird.

Man hat nun, die Bezeichnung (V. §. 29.) gebrauchend, genau wie in den (§. §. 73—75.) für den einfachern Fall der hiesigen Aufgabe gefunden wurde,

1) $\delta(U_{b+q}) = \delta_1(U_{b+a}) + V_b \cdot \delta b - V_a \cdot \delta a$

2) $\delta^2(U_{b+a}) = \delta_1^2(U_{b+a}) + 2(\delta_1 V)_b \cdot \delta b - 2(\delta_1 V)_a \cdot \delta a +$
$+ (\partial V)_b \cdot \delta b^2 - (\partial V)_a \cdot \delta a^2 + V_b \cdot \delta^2 b - V_a \cdot \delta^2 a,$

wo $\delta_1(U_{b+a}) = \int_{b+a}(\delta_1 V) \cdot \partial x$, und $\delta_1^2(U_{b+a}) = \int_{b+a}(\delta_1^2 V) \cdot \partial x$

*) Vergl. Note zu (§. 69.).

ist, während die $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$ hier genau die δV, $\delta^2 V$ des (§. 77. und §. 79.) seyn werden.

Man bekommt also, $\delta(U_{b \div a}) = 0$ setzend, nach (§. 6.):

I. dieselbe allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums, wie (§. 77.);

II. auch dieselbe Grenzgleichung, nur daß hier die beiden Glieder $V_b . \delta b - V_a . \delta a$ noch hinzutreten, so daß sie jetzt nachstehende:

$$\psi_b . \delta y_b - \psi_a . \delta y_a + \psi'_b . (\partial \delta y)_b - \psi'_a . (\partial \delta y)_a + V_b . \delta b - V_a . \delta a = 0$$

werden wird, wie sogleich in die Augen fällt, wenn man den Weg verfolgt, der (§. 73.) für dieselbe Aufgabe in dem einfachern Falle betreten worden ist.

Diese Grenzgleichung wird nun nach denselben Principien behandelt, welche man (§. 74.) angewandt findet, je nachdem die nächst größern und nächst kleinern Werthe von y und a und b, in Bezug auf welche das Maximum oder Minimum gesucht wird, von einander ganz unabhängig seyn, oder noch gegebenen Gleichungen genügen, oder endlich gegebene Funktionen unverändert lassen sollen, für die Grenzwerthe von x, nehmlich $x = a$ oder $x = b$; und das (§. §. 74. und 75.) zu findende Detail wird hier eine Wiederholung desselben überflüssig machen.

Eben so wird man die Schlüsse des (§. 79.) für das hiesige $\delta^2 U_{b \div a}$ wie (§. 76.) für den einfachern Fall bereits berührt worden ist, mit wenigen und unwesentlichen Abänderungen auch hier anwenden können, um sich zu überzeugen, daß auch jetzt noch $U_{b \div a}$ ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ seyn wird in der angegebenen Beziehung, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b beständig ein und dasselbe Zeichen behält und zwar jedesmal $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ wird.

Anmerkung. Nachdem wir in den (§. §. 68 — 80.) die einfacheren Fälle dieser Gattungen von Aufgaben betrachtet und durchgeführt haben, einmal wo $V = f(x, y, \partial y)$ und dann, wo $V = f(x, y, \partial y, \partial^2 y)$, so wollen wir zu der allgemeinern Aufgabe fortschreiten.

§. 81. Aufgabe.

Es ist gegeben $V = f(x, y, y_1, y_2, \dots y_m)$, wo y_p für jede Zahl p die Ableitung $\partial^p y$ nach x genommen vorstellen soll; ferner

$$U = \int V . \partial x.$$

Man soll die Funktion y von x suchen, welche das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral $U_{b \div a}$ zu einem Maximum oder Minimum macht, entweder

1) in Bezug auf die nächst größern und nächst kleinern durch y_u bezeichneten Funktionen, als Werthe von y, wie beliebig sie auch genommen werden mögen,

oder

2) in Bezug auf diejenigen Werthe y_u von y, die aber an den Grenzen noch gegebenen Gleichungen von der Form
$\varphi(y_b, y_a, (\partial y)_b, (\partial y)_a, (\partial^2 y)_b, (\partial^2 y)_a \dots (\partial^m y)_b, (\partial^m y)_a) = 0,$
$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0,$ etc. etc. genügen,

oder

3) in Bezug auf diejenigen Werthe y_u von y, die nicht allen diesen Gleichungen oder die gar keiner derselben genügen, dagegen einigen oder allen dieser Funktionen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2,$ etc. unveränderlich dieselben bleibenden Werthe lassen (die nicht Null und auch nicht gegeben sind.). *)

Auflösung. Man hat hier nach (B. §. 5. oder B. §. 9.):

---

*) Wäre der unveränderliche Werth φ z. B. gegeben und $= \gamma$, so hätte man $\varphi = \gamma$ oder $\varphi - \gamma = 0$, oder $\psi = 0$, wenn man $\varphi - \gamma$ durch ψ vorstellte, und es wäre also dies derselbe Fall, wo an den Grenzen eine Gleichung $\varphi = 0$ oder $\psi = 0$ gegeben ist.

$$1)\ \delta V = S.\left[\frac{\partial V}{\partial y_a}.\partial^a \delta y\right]_{a+b=m}$$

und nach (B. 6. E. §. §. 60. 62. 65. oder B. §. §. 11. 12.):

$$2)\ \delta(U_{b+a}) = \int_{b+a} S.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right]_{a+b=m} \delta y.\partial x +$$

$$+\left(S.\left[(-1)^c.\partial^c.\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^d \delta y\right]_{b+c+d=m-1}\right)_{b+a}.$$

Folglich wenn man nach (§. 6.) für das Maximum und Minimum $\delta(U_{b+a}) = 0$ setzt nach (E. §. 93.):

$$\text{I.)}\ S.\left[(-1)^a.\partial^a \frac{\partial V}{\partial y_a}\right]_{a+b=m} = 0,$$

als die allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums, welche eine Differentialgleichung in der Regel von der 2m^ten Ordnung seyn wird, und integrirt, y in x mit 2m willkührlichen Constanten $C, C_1, C_2 \ldots C_{m-1}$ liefert; und

$$\text{II.)}\ \left(S.\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^d \delta y\right]_{b+c+d=m-1}\right)_{b+a} = 0,$$

welche nach (E. §. 65. Anmerkung.) die Form

$$\left.\begin{matrix} P_b.(\delta y)_b + Q_b.(\partial\delta y)_b + R_b.(\partial^2\delta y)_b + \ldots + S_b.(\partial^{m-1}\delta y)_b \\ -P_a.(\delta y)_a - Q_a.(\partial\delta y)_a - R_a.(\partial^2\delta y)_a - \ldots - S_a.(\partial^{m-1}\delta y)_a \end{matrix}\right\} = 0$$

hat.

Im Falle (1.) der Aufgabe sind nun die 2m Coefficienten $P_b, P_a, Q_b, Q_a \ldots S_b, S_a$ nach (E. §. 87.) alle einzeln $=0$, und diese 2m Gleichungen werden im Allgemeinen zur Bestimmung der 2m Constanten C, C_1, C_2, etc. gebraucht werden können.

Im Falle (2.) und (3.) der Aufgabe, wird man aus der Grenzgleichung nach (E. §. 94.) mittelst der Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, etc. etc., eben so viele der Ausdrücke

δy_b, δy_a, $(\partial \delta y)_b$, $(\partial \delta y)_a$, etc. etc.
eliminiren, als solche Gleichungen gegeben sind, und die Coefficienten der entstehenden Eliminationsgleichung (in so ferne die übrigen der von δy abhängigen Ausdrücke für $x=a$ und $x=b$ genommen, als von einander ganz unabhängige Werthe habend gedacht werden können) einzeln der Null gleich seyn, so daß diese Gleichungen, in welche die Grenzgleichung zerfällt, in Verbindung mit den etwa noch gegebenen Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. zur Bestimmung der Constanten entweder zum Theil oder ganz ausreichen werden. — Bleiben noch einige der Constanten unbestimmt, so können sie, noch andern Bedingungen der Aufgabe Genüge leistend bestimmt werden; — alles wie wir solches (§. §. 68—80.) für die einfachern Fälle bereits im Detail gesehen haben.

Geht man zuletzt zu $\delta^2(U_{b\div a})$ über, so findet sich, den Gang (§. §. 68 und 79.) wiederholend und für diesen allgemeinen Fall erweiternd, daß $U_{b\div a}$ in jeder der drei angegebenen Beziehungen ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, so oft $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b, beständig ein und dasselbe Zeichen behält, d. h. beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist, (einige Nullen-Werthe mit eingeschlossen).

Ob aber, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b nicht einerlei sondern verschiedene Zeichen erhält, dann unser $U_{b\div a}$ weder ein Maximum noch ein Minimum seyn werde, muß jedesmal noch einer besondern Untersuchung unterworfen bleiben.

Ist endlich $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}=0$ (für jeden Werth von x zwischen a und b) so muß die Untersuchung für diesen Ausnahmsfall besonders geführt werden (wie solches (§. §. 69 und 79.) in

den einfachern Fällen geschehen), und man wird dann die Bedingungen jedesmal leicht finden, für welche, wenn sie erfüllt sind, unser U_{b+a} ein Maximum seyn wird oder ein Minimum. *)

§. 82. Zusatz 1.

Sollte nicht bloß y als Funktion von x, sondern sollten auch noch b und a so gefunden werden, daß U_{b+a} ein Maximum oder Minimum würde in Bezug auf alle nächst größern und nächst kleinern Werthe y_* von y, und auch b_*, a_* von b und a, so würde man, nach (§. §. 73 und 80.) verfahrend,

I. dieselbe allgemeine Gleichung für das Maximum und Minimum erhalten, wie (§. 81.);

II. auch dieselbe Grenzgleichung, nur daß zu letzterer noch die Glieder

$$V_b . \delta b - V_a . \delta a$$ hinzutreten.

Das nähere Detail ist (§. §. 74 und 75.) für die einfachern Fälle gezeigt worden.

Eben so würde man für den gegenwärtigen Fall genau dieselbe Bedingung für die Unterscheidung des Maximums vom Minimo erhalten, die (§. 81.) für die dortigen Aufgaben erhalten worden ist.

§. 83. Lehrsatz.

Bedeutet U irgend eine der Funktionen, wie wir sie (B. §. 15.) durch U, (B. §. §. 19. 21.) durch U_1, (B. §. 22.) durch U_2, (B. §. 28.) durch U_3 bezeichnet haben, oder irgend eine analoge Integral-Funktion, welche bloß außer x noch y und die Ableitungen von y nach x, allein enthält, so wird man im Allgemeinen die Werthe von y finden in x, welche dieses U_{b+a} zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle nächst größern und nächst kleinern

*) Vergl. Note zu (§. 69.)

Werthe von y, die durch y_x oder $y + x.\delta y + \frac{x^2}{2!}.\delta^2 y + \ldots$ vorgestellt sind, oder in Bezug auf diejenigen darunter, welche an den Grenzen, d. h. für $x = a$ oder $x = b$ noch gegebenen Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc., oder andern noch gegebenen Bedingungen genügen; wenn man $\delta(U_{b \div a})$ nach Anleitung der (V. §. §. 15. 19. 21. 22. 23.) auf die Form

$$\int_{b \div a} \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots).\delta y.\partial x$$
$$+ \begin{Bmatrix} P_b.(\delta y)_b + Q_b.(\partial \delta y)_b + R_b.(\partial^2 \delta y)_b + \ldots \\ -P_a.(\delta y)_a - Q_a.(\partial \delta y)_a - R_a.(\partial^2 \delta y)_a - \ldots \end{Bmatrix}$$

bringt, dann solchen $= 0$ setzt (nach §. 6.), und aus dieser Gleichung sogleich (nach C. §. §. 93 oder 94.)

I.) $\psi(x, y, y_1, y_2 \ldots) = 0$

als die allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums, und

$$\text{II.)} \begin{Bmatrix} P_b.(\delta y)_b + Q_b.(\partial \delta y)_b + R_b.(\partial^2 \delta y)_b + \ldots \\ -P_a.(\delta y)_a - Q_a.(\partial \delta y)_a - R_a.(\partial^2 \delta y)_a - \ldots \end{Bmatrix} = 0$$

als die Grenzgleichung ableitet; dabei aber die an den Grenzen noch gegebenen Bedingungen wie (§. 68—82.) gehörig in Rechnung bringt, um die Grenzgleichung in diejenigen Gleichungen zu zerfällen, welche zur Bestimmung der aus der Integration von (I.) eingehenden willkührlichen Constanten dienen. *)

Beweis fällt in die Augen; doch darf man nicht übersehen, daß auch noch $\delta(U_{b \div a}) = \infty$ gesetzt werden muß, wenn kein Maximum oder Minimum verloren gehen soll.

Anmerkung. Zu gleicher Zeit mag bemerkt werden, daß die Gleichung (I.) oder vielmehr die daselbst durch ψ bezeichnete Funktion auch noch unbestimmte Integrale enthalten kann und enthalten wird; und daß dann die Integration von $\psi = 0$ nicht so un-

*) Hieher gehören die meisten Aufgaben des IIIten Kapitels der Methodus inv. lin. curv. max. min. etc. etc. etc. auch (u. n. 39. 40.) des IV. Kap.

mittelbar von statten gehen kann, sondern daß die vorkommenden Integral-Ausdrücke, dadurch daß man $\psi=0$ mit $\partial\psi=0$, $\partial^2\psi=0$, etc. in Verbindung bringt (also die Gleichung $\psi=0$ oft genug differentiirt, um sich die nöthige Zahl der Gleichungen zu verschaffen), erst eliminirt werden müssen, um eine Differentialgleichung von der gewöhnlichen Form zu erhalten, in welcher nicht mehr unbestimmte Integrale vorkommen und für welche daher auf den bekannten Wegen die Integralgleichung gesucht werden kann.

§. 84. Aufgabe.

Es ist gegeben

$$V=f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_m, z, z_1, z_2, \ldots z_n)$$

wo y_p mit $\partial^p y$ und z_p mit $\partial^p z$ gleichbedeutend seyn sollen, die Ableitungen nach x genommen. Ferner ist

$$U=\int V.\partial x.$$

Man soll für y und z diejenigen Funktionen von x finden, für welche das zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommene Integral $U_{b\div a}$ ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle nächst größern und nächst kleinern Werthe von y und z, die durch y_* und z_* vorgestellt seyn mögen.

Auflösung. Man hat hier

$$V_*=f(x, y_*, \partial(y_*) \ldots \partial^m(y_*), z_*, \partial(z_*) \ldots \partial^n(z_*))$$

und $U_*=\int(V_*).\partial x$, während $(U_*)_{b\div a}$ die Nachbar-Werthe von $U_{b\div a}$ sind, die hier in Betrachtung kommen. — Man hat nun (V. §. §. 5. oder V. §. 10.):

$$1)\ \delta V=S.\left[(-1)^a.\frac{\partial V}{\partial y_a}.\partial^a\delta y\right]_{a+b=m}+S.\left[(-1)^a.\frac{\partial V}{\partial z_a}.\partial^a\delta z\right]_{a+b=n}$$

und $\delta U=\int(\delta V).\partial x$, d. h. nach (E. §. 62 oder E. §. 67 oder V. §. 13.):

$$2)\ \delta(U_{b\div a})=\int_{b\div a}(Y.\delta y+Z.\delta z).\partial x+$$
$$+(S.[P_b.\partial^b\delta y]+S.[Q_b.\partial^b\delta z])_{b\div a},$$

wenn man der Kürze wegen

$$3)\ S.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right]_{a+b=m}=Y,$$

4) $S.\left[(-1)^a . \partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial z_a'}\right)\right]_{a+b=n} = Z,$

5) $S.\left[(-1)^c . \partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+p+1}}\right)\right]_{b+c+p=m-1} = P_p$

6) $S.\left[(-1)^c . \partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial z_{c+q+1}}\right)\right]_{b+c+q=n-1} = Q_q$

wo P_p nothwendig als Null angesehen werden muß, sobald $p \overline{\gtrless} m$, eben so Q_q, sobald $q \overline{\gtrless} n$ ist;

setzt und unter p und q, Null oder eine bestimmte ganze Zahl sich denkt, während a, b, c, d, nach und nach 0 und alle möglichen ganzen Zahlen bedeuten, welche der jedesmal untergesetzten (Bedingungs-) Gleichung genügen, genau nach (E. §. 30.).

Verfährt man nun nach (§. 6.), berücksichtigt aber $\delta(U_{b+a}) = \infty$ nicht, sondern setzt bloß

$$\delta(U_{b+a}) = 0,$$

so erhält man, nach (E. §. 95.):

I. $Y = 0$ und $Z = 0$,

als allgemeine Gleichungen des Maximums und Minimums und als Grenzgleichung:

II. $(S.[P_b . \partial^b \delta y] + S.[Q_b . \partial^b \delta y])_{b+a} = 0.$

Nun ist die Gleichung $Y = 0$ eine Differentialgleichung nach y von der $2m^{ten}$, nach z von der $m+n^{ten}$ Ordnung; eben so $Z = 0$ eine solche, nach y von der $m+n^{ten}$, nach z von der $2n^{ten}$ Ordnung. Eliminirt man daher aus beiden y oder z und integrirt nach (E. §. §. 102. 103.), so erhält man y und z mit $2m+2n$ willkührlichen Constanten, welche nun noch zum Theil oder alle mittelst der Grenzgleichung (II.) ihre Bestimmung erhalten müssen. Diese Grenzgleichung ist aber, wie man sieht, von der Form:

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l} (P_0)_b.(\delta y)_b + (P_1)_b.(\partial\delta y)_b + \ldots + (P_{m-1})_b.(\partial^{m-1}\delta y)_b \\ -(P_0)_a.(\delta y)_a - (P_1)_a.(\partial\delta y)_a - \ldots - (P_{m-1})_a.(\partial^{m-1}\delta y)_a \\ +(Q_0)_b.(\delta z)_b + (Q_1)_b.(\partial\delta z)_b + \ldots + (Q_{n-1})_b.(\partial^{n-1}\delta z)_b \\ -(Q_0)_a.(\delta z)_a - (Q_1)_a.(\partial\delta z)_a - \ldots - (Q_{n-1})_a.(\partial^{n-1}\delta z)_a \end{array}\right\} = 0$$

Sind nun 1) an den Grenzen keine Gleichungen mehr gegeben, und sollen auch keine Funktionen unverändert bleiben, so sind die $2m+2n$ einzelnen Coefficienten von

$$(\delta y)_b, (\delta y)_a, (\delta z)_b, (\delta z)_a, (\partial \delta y)_b, \text{ etc. etc. etc.},$$

jeder für sich der Null gleich (E. §. 95.), und diese Gleichungen dienen zur Bestimmung der obigen $2m+2n$ willkührlichen Constanten.

Sind dagegen 2) noch solche Gleichungen zwischen den Werthen von y, z und ihren Ableitungen an den Grenzen, d. h. für $x=a$ und $x=b$ gegeben, oder sollen gegebene Funktionen von $y_b, y_a, z_b, z_a, (\partial y)_b$, etc. etc. etc. unverändert bleiben, so hat man allemal noch die Gleichungen

$$\delta\varphi=0, \delta\varphi_1=0, \delta\varphi_2=0, \text{ etc. etc.},$$

mittelst welcher man eben so viele der Ausdrücke in δy, und δz, wie sie in (II.) vorkommen, eliminiren kann, nach (E. §. 96.), um dann die übrig bleibenden Coefficienten einzeln $=0$ setzen zu können und so die Gleichungen zur Bestimmung der Constanten zu erhalten, welche Constanten entweder alle bestimmt werden, oder zum Theil noch unbestimmt bleiben, und noch andern Bedingungen der Aufgabe genügen können.

(Ueber das letztere Verfahren und hinsichtlich der Begründung desselben ist (E. §. §. 95. 96.) sorgfältig nachzulesen.)

Beispiel. Es wird die Curve doppelter Krümmung gesucht, welche entweder zwischen zwei gegebenen Punkten, oder zwischen einem Punkt und einer gegebenen Curve oder Fläche, oder zwischen zwei gegebenen Curven oder Flächen die kürzeste ist; oder die kürzeste ist zwischen zwei Punkten, für welche die Summe oder das Produkt der Ordinaten u. s. w. unverändert denselben Werth behalten sollen, auch für die nächstangrenzenden Curven, in Bezug auf welche das Maximum oder Minimum gesucht wird.

§. 85. Zusatz 1.

Um in das Verfahren einzuleiten, durch welches das Maximum von dem Minimo unterschieden wird, betrachten wir nur den besondern Fall wo $m=2$, $n=1$, also

$$V=f(x, y, y_1, y_2, z, z_1),$$ und wo

$$\text{I.}\quad \begin{cases} Y = \frac{\partial V}{\partial y} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) + \partial^2\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right) = 0, \\ Z = \frac{\partial V}{\partial z} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right) = 0 \end{cases}$$

als allgemeine Gleichungen des Maximums und Minimums, dagegen

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right)_b\cdot(\delta y)_b + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_b\cdot(\partial\delta y)_b + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)_b\cdot(\delta z)_b \\ &- \left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right)_a\cdot(\delta y)_a - \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_a\cdot(\partial\delta y)_a - \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)_a\cdot(\delta z)_a \end{aligned}\right\} = 0$$

als die Grenzgleichung sich ergiebt, wo also die Gleichungen (I.) integrirt, y und z als Funktionen von x mit 6 willkührlichen Constanten geben, welche letztern nachgehends aus der Gleichung (II.) ihre Bestimmung erhalten, wie vorhin bemerkt, und in früheren namentlich (§. §. 79—80.) schon im Detail durchgeführt ist.

Man hat nun ferner, (V. §. 5. oder W. §. 10.):

$$\begin{aligned} 1)\quad \delta^2 V = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cdot\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\cdot\partial y_1}\cdot\delta y\cdot\partial\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\cdot(\partial\delta y)^2 + \\ & + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\cdot\partial y_2}\cdot\delta y\cdot\partial^2\delta y + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1\cdot\partial y_2}\cdot\partial\delta y\cdot\partial^2\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\cdot(\partial^2\delta y)^2 + \\ & + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\cdot\partial z}\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1\cdot\partial z}\cdot\partial\delta y\cdot\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_2\cdot\partial z}\cdot\partial^2\delta y\cdot\delta z + \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\cdot\delta z^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\cdot\partial z_1}\cdot\delta y\cdot\partial\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1\cdot\partial z_1}\cdot\partial\delta y\cdot\partial\delta z + \\ & + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_2\cdot\partial z_1}\cdot\partial^2\delta y\cdot\partial\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z\cdot\partial z_1}\cdot\delta z\cdot\partial\delta z + \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}\cdot(\partial\delta z)^2 + \\ & + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\partial\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\partial^2\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\delta^2 z + \frac{\partial V}{\partial z_1}\cdot\partial\delta^2 z \end{aligned}$$

und (V. §. 6.):

$$2)\quad \delta^2 U = \int(\delta^2 V)\cdot\partial x.$$

Integrirt man aber die 5 letzten Glieder von $\delta^2 V$ nach (C. §. §. 60. 62.) theilweise, so ist vermöge der allgemeinen Gleichungen (I.) das Integral derselben

$$(\text{A.})\ \ldots = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right)\cdot\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\partial\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z_1}\cdot\delta^2 z\right].$$

Das allgemeine Integral der übrigen Glieder von $\delta^2 V$, um so viel wie möglich außerhalb des $\int$ Zeichens zu bringen, kann man

$$(\mathfrak{B.})_{,} = \alpha.\delta y^2 + 2\beta.\delta y.\partial\delta y + \gamma.(\partial\delta y)^2 + 2\varepsilon.\delta y.\delta z + 2\zeta.\partial\delta y.\delta z + \vartheta.\delta z^2$$

$$+\int\left\{\begin{matrix} A.(\partial^2\delta y)^2 + 2B.\partial^2\delta y.\partial\delta y + C.(\partial\delta y)^2 + 2D.\partial^2\delta y.\delta y + \\ + 2E.\partial\delta y.\delta y + F.\delta y^2 + 2G.\partial^2\delta y.\partial\delta z + 2H.\partial\delta y.\partial\delta z + \\ + 2J.\delta y.\partial\delta z + K.(\partial\delta z)^2 + 2L.\partial^2\delta y.\delta z + 2M.\partial\delta y.\delta z + \\ + 2N.\delta y.\delta z + 2P.\partial\delta z.\delta z + Q.\delta z^2 \end{matrix}\right\}.\partial x$$

setzen, und erhält dann, wenn man differentiirt, und die Ausdrücke links und rechts identisch zu machen sucht:

$$A = \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}, \quad G = \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 . \partial z_1}, \quad L = \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}$$

und die übrigen 12 Buchstaben B, C, D, etc. etc. etc. werden die völlig willkührlichen Funktionen von x, die wir durch $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \vartheta$ bezeichneten, in ihrem Ausdrucke aufnehmen. — Diese unbestimmten Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \vartheta$, kann man nun so annehmen, daß der obige unter dem Integral-Zeichen $\int$ noch stehende Ausdruck in ($\mathfrak{B}$.), die Form

$$(\mathfrak{C}.)\ldots\int\left\{\begin{matrix} A.(\partial^2\delta y + f.\partial\delta z + f_1.\partial\delta y + f_2.\delta y + f_3.\delta z)^2 \\ + A_1.(\partial\delta z + g.\partial\delta y + g_1.\delta y + g_2.\delta z)^2 \end{matrix}\right\}.\partial x$$

annimmt, weil dazu nach (E. §. 24.) gerade 6 Bedingungs-Gleichungen erfüllt seyn müssen, welchen gemäß die 6 Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \vartheta$ bestimmt werden können. Dabei mag man im Auge behalten: 1) daß diese 6 Bedingungs-Gleichungen Differential-Gleichungen der 1ten Ordnung sind, daher nach (E. §. §. 102 — 105.) in die Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \vartheta$, sechs willkührliche Constanten einführen werden; 2) daß $A_1 = L - \frac{G^2}{A}$ ist.

Dieser Theil ($\mathfrak{C}$.) von ($\mathfrak{B}$.) ist daher nothwendig $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ (E. §. 50.), wenn $AL > G^2$ und $A \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ d. h. wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} . \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2} > \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2 . \partial z_1}\right)^2$ ist, und $\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}$ (oder

$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}\right)$ beständig ein- und dasselbe Zeichen behalten d. h. fort während $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind, für jeden Werth von x zwischen a und b, in so ferne die Integrale zwischen den Grenzen x=a und x=b genommen werden. Der dann noch übrige Theil von $\delta^2(U_{b+a})$ oder $\int_{b+a}(\delta^2 V).\partial x$, ist nun, erstens der Ausdruck (A.) und dann noch der erste Theil von (B.) zwischen den Grenzen x=a und x=b genommen, nehmlich

$$\left(\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}-\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right).\delta^2 y+\frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial\delta^2 y+\frac{\partial V}{\partial z_1}.\delta^2 z\right)_{b+a}+$$

$$+(\alpha.\delta y^2+2\beta.\delta y.\partial\delta y+\gamma.(\partial\delta y)^2+2\varepsilon.\delta y.\delta z+2\zeta.\partial\delta y.\delta z+\vartheta.\delta z^2)_{b+a}$$

und da hier noch die 6 willkührlichen Constanten eingehen (in, α, β, γ, ε, ζ, ϑ), so wird man diese für jedes andere δy, $\delta^2 y$, etc. und für jedes andere δz, $\delta^2 z$, etc., jedesmal anders, immer aber so annehmen können, daß dieser Theil von $\delta^2(U_{b+a})$ entweder Null wird, oder doch mit dem Theile (C.) ein und dasselbe Zeichen erhält.

Es wird also U_{b+a} ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn, in der angegebenen Beziehung, so oft

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}.\frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}>\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2.\partial z_1}\right)^2 \text{ und } \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\left(\text{oder } \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}\right)$$

für jeden Werth von x zwischen a und b beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ wird, (was für Grenzgleichungen auch noch statt finden mögen, denen durch die nächst größern und nächst kleinern Werthe y_n und z_n von y und z, genügt werden soll).

Ist aber dieser Gang wohl aufgefaßt, so wird man leicht für den allgemeinen Fall der Aufgabe (§. 84.) finden, daß U_{b+a} ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, in der gegebenen Beziehung, wenn für jeden Werth von x zwischen a und b jedesmal

$\frac{\partial V^2}{\partial y_m^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2} > \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_m \cdot \partial z_n}\right)^2$ und zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}$ (oder $\frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2}$)

beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ wird. *)

Ob aber, wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, namentlich wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}$ oder $\frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2}$ nicht beständig einerlei sondern verschiedene Zeichen erhalten, für verschiedene Werthe von x zwischen a und b, dies allemal anzeige, daß nun U_{b+a} weder ein Maximum noch ein Minimum seyn könne (für die vorher gefundenen Funktionen y und z von x), muß noch besonders nachgewiesen werden.

Ist aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2} = 0$ oder $\frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2} = 0$ oder sind beide zugleich Null, für jeden Werth von x zwischen a und b, so muß man dieselbe Untersuchung noch einmal direkt vornehmen, und wird dann die Bedingungen für das Maximum oder Minimum für diesen Ausnahmsfall jedesmal leicht auffinden.

§. 86. Zusatz 2.

Werden nicht bloß die Funktionen y und z sondern auch noch die Werthe a und b gesucht, welche U zu einem Maximum oder Minimum machen sollen, unter allen durch

$$(U_{b+a})_{(\ast)} \quad \text{oder} \quad (U_\ast)_{b+a},$$

ausgedrückten Nachbar-Werthen, so wird bloß $\partial(U_{b+a})$ noch um die beiden Glieder $V_b \cdot \partial b - V_a \cdot \partial a$ vermehrt,

---

*) Nach (E. §. §. 3. 4.) sind diese Bedingungen dieselben, die man auch erhalten würde, wenn

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2} \cdot p^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y_m \cdot \partial z_n} \cdot pq + \frac{\partial^2 V}{\partial z_n^2} \cdot q^2$$

für jeden reellen Werth von p und q und für jeden Werth von x zwischen a und b beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ werden sollte.

welches gar keinen Einfluß hat auf die allgemeinen Gleichungen (I.), (so daß diese dieselben bleiben wie (§. 84.)), sondern nur auf die Grenzgleichung (II.), welche um dieselben beiden Glieder vermehrt seyn wird.

Die Bedingungen wodurch das Maximum von dem Minimo unterschieden werden kann, bleiben auch unverändert dieselben, wie solche (§. 85.) gefunden sind.

§. 87. Aufgabe.

Dieselbe Aufgabe wie (§. 83.), jedoch mit dem Unterschiede, daß zwischen y und z als Funktionen von x (also nicht nur für die Grenz-Werthe von x) noch eine Gleichung $\psi(y, z)=0$ gegeben, so daß nicht unter allen möglichen Werthen y. und z. sondern nur unter denen, welche zugleich der Gleichung $\psi(y, z)=0$ genügen, für welche also auch $\partial\psi=0$, $\partial^2\psi=0$, etc. etc. seyn muß, diejenigen für das Maximum oder Minimum herausgesucht werden sollen.

Auflösung. Man finde aus $\psi(y, z)=0$, z in y ausgedrückt und setze diese Werthe in V, so reducirt sich die Aufgabe auf die der (§. §. 68—80.).

Beispiel. Es wird z. B. gesucht die kürzeste Linie auf einer durch die Gleichung $\psi=0$ gegebenen Fläche, entweder zwischen 2 gegebenen Punkten, oder zwischen einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Linie, oder zwischen 2 gegebenen Linien, oder welche besonderen Bedingungen noch gemacht werden mögen.

§. 88. Zusatz 1.

Will man aber die Gleichung $\psi(y, z)=0$ nicht auflösen, so kann man genau so verfahren wie im (§. 84.), findet $\partial(U_{b+a})$ genau wie dort (§. 84. n. 2.), nur mit dem Unterschiede, daß ∂y und ∂z nicht von einander ganz unabhängig sind, sondern abhängig mittelst der Gleichung

$$\partial\psi=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\partial y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\partial z=0.$$

Differentiirt man aber diese letztere Gleichung, so findet man

auch die Gleichungen, durch welche $\partial\delta z$, $\partial^2\delta z$, etc. etc. $\partial^{n-1}\delta z$ in δy, $\partial\delta y$, ... $\partial^{n-1}\delta y$ lineär ausgedrückt werden können. Eliminirt man nun aus dem $\delta(U_{b+a})$ des (§. 84. n. 2.) diese δz, $\partial\delta z$, $\partial^2\delta z$, ... $\partial^{n-1}\delta z$ (nach E. §. 1.), und setzt dann nach (§. 6.) $\delta(U_{b+a})=0$, so erhält man nach (E. §. §. 93. 94.):

$$\text{I.}\begin{cases} Y+\lambda.\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=0, \\ Z+\lambda.\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=0 \end{cases}$$

unter der Voraussetzung, daß λ durch bestimmt ist, als die allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums; woraus, nach Elimination von λ, in Verbindung mit $\psi(y, z)=0$, y und z als Funktionen von x sich ergeben werden, mit $2m$ willkührlichen Constanten, wenn $m \overline{>} n$ angenommen ist (was allemal geschehen kann, weil im entgegengesetzten Falle y und z, so wie m und n nur mit einander vertauscht werden dürften). Die Grenzgleichung (II. §. 84.) bleibt dieselbe, nur daß δz, $\partial\delta z$, ... $\partial^n\delta z$ in δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, ... $\partial^n\delta y$ ausgedrückt gedacht werden müssen.

Da ferner auch mit $\psi=0$ noch $\delta^2\psi=0$ gegeben ist, so kann man auch $\delta^2 z$, und dann auch die Ableitungen $\partial\delta^2 z$, $\partial^2\delta^2 z$, etc. in δy, $\delta^2 y$, etc. ausdrücken, und dann $\delta^2 V$, folglich auch $\delta^2(U_{b+a})$ so umformen, daß es bloß δy, $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$ ... aber nicht mehr δz, $\delta^2 z$, $\partial\delta z$, etc. etc. enthält, und man wird dann die (§. 86.) bereits für diesen Fall gefundenen Bedingungen unmittelbar statt finden lassen können.

§. 89. Zusatz 2.

Ist dagegen in der Aufgabe (§. 87.) nicht $\psi(y, z)=0$, sondern $\psi(y, y_1, y_2 \ldots y_p, z, z_1, z_2 \ldots z_q)=0$ gegeben, so möchte es im Allgemeinen unmöglich seyn, ohne y zu haben, z zu finden, wie in der Auflösung (§. 87.) verlangt wurde, und selbst, wenn man das Verfahren (§. 88.)

anwenden wollte, würde man aus der Gleichung $\partial\psi = 0$, d. h. aus

$$(\mathfrak{P}.)\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\psi}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}.\partial\delta y+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_p}.\partial^p\delta y\\+\frac{\partial\psi}{\partial z}.\delta z+\frac{\partial\psi}{\partial z_1}.\partial\delta z+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial z_q}.\partial^q\delta z\end{array}\right\}=0$$

weder δz in δy, noch δy in δz ausdrücken können, so lange nicht y und z bekannte Funktionen von x sind, so daß auch die Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{P}$.) bereits als Funktionen von x erscheinen.

Es wird daher gerathener seyn, zur Elimination von δz, etc. einen Weg einzuschlagen, der mit dem (E. §. 1.) angegebenen analog, wenn auch etwas zusammengesetzter ist. Zu dem Ende bemerke man, daß, was auch λ seyn mag, doch immer, wegen $\psi = 0$ auch $\lambda.\psi = 0$ und $V + \lambda.\psi = V$ seyn wird, also auch

1) $\delta U = \int(V+\lambda.\psi).\partial x$;

folglich, wenn man in (§. 84. n. 3—6.) $V+\lambda.\psi$ statt V setzt, noch genau wie im (§. 84.)

2) $\delta(U_{b+n}) = \int_{b+n}(Y.\delta y + Z.\delta z).\partial x +$
$(S.[P_b.\partial^b\delta y] + S.[Q_b.\partial^b\delta z])_{b+n}$,

nur daß jetzt in Y und Z und P_b und Q_b, $V+\lambda.\psi$ statt V gesetzt steht, während b nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen vorstellt.

Denkt man sich nun $\delta(U_{b+n}) = 0$ gesetzt (§. 6.), und dabei λ als eine solche Funktion von x, daß

I. { 3) $Z = 0$ wird, so wird nach (E. §. 93. §. 94.)
auch 4) $Y = 0$ seyn müssen

$$\text{wo}\quad Y = \underset{a+b=m}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial(V+\lambda.\psi)}{\partial y_a}\right)\right]$$

$$\text{und}\quad Z = \underset{a+b=n}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial(V+\lambda.\psi)}{\partial z_a}\right)\right]\quad\text{ist.}$$

Die Grenzgleichung bleibt wiederum genau die (II.) des

(§. 84.), nur daß man sich δz, $\partial\delta z$ etc. ... in δy, $\partial\delta y$, etc. bereits ausgedrückt denken muß, und überall $V + \lambda.\psi$ statt V. — Eliminirt man nun λ aus (3. und 4.) nach (E. §. 102.), so erhält man eine Gleichung, die mit $\psi = 0$ in Verbindung y und z in x mit einer Anzahl willkührlicher Constanten liefern wird.

Was nun die Grenzgleichung (II.) betrifft, so werden erstlich, weil z in y und dann auch δz in δy, etc., durch eine Differentialgleichung von der q^{ten} Ordnung gegeben ist, entweder q der Ausdrücke $(\delta z)_a$, $(\partial\delta z)_a$, $(\partial^2\delta z)_a$ etc. etc. völlig unbestimmt bleiben, für jedes beliebig gedachte δy, oder durch gegebene Gleichungen zwischen

$$y_b,\ z_b,\ y_a,\ z_a,\ (\partial y)_b,\ (\partial y)_a,\ (\partial z)_b \text{ etc. etc. etc.}$$

(mittelst welcher die in z aus $\psi = 0$ eingehenden q willkührlichen Constanten näher bestimmt werden sollen) von den übrigen derselben Ausdrücke abhängig seyn und aus der Grenzgleichung eliminirt werden können; und da λ aus den Gleichungen (3. und 4.) durch eine Differentialgleichung bestimmt wird, so kann man die dadurch in λ bleibenden willkührlichen Constanten noch so annehmen, daß in der Grenzgleichung die mit $(\delta z)_b$, $(\partial\delta z)_b$, etc. behafteten Glieder, die noch nicht weggeschafft sind, von selbst wegfallen, indem man ihre Coefficienten $= 0$ setzt. — Dann bleiben, ohne daß das Auffinden des δz in δy etc. etc., der Elimination wegen, nöthig geworden wäre, nur noch die mit

$$(\delta y)_b,\ (\delta y)_a,\ (\partial\delta y)_b, \text{ etc.} \quad \ldots$$

behafteten Glieder in der Grenzgleichung übrig, deren Coefficienten einzeln $= 0$ seyn müssen, wenn zwischen $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$ etc. nicht noch Gleichungen gegeben sind. Und wären noch solche Gleichungen gegeben, so würde man so viele der dadurch abhängigen $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$ etc. etc. nach (E. §. 1.) vorher eliminiren, übrigens dann allemal die Gleichungen finden, welche zur Bestimmung der Constanten dienen.

Für dieses Auffinden der letzteren Gleichungen kann

man nun sich leicht die nachstehende praktische Regel abstrahiren:

„Aus den zwischen
„ $y_b, y_a, (\partial y)_b, (\partial y)_a$, etc. $z_b, z_a, (\partial z)_b$, etc. etc.
„gegebenen Gleichungen $\varphi=0, \varphi_1=0, \varphi_2=0$, bilde man sich
„ $\alpha.\delta\varphi=0, \beta.\delta\varphi_1=0, \gamma.\delta\varphi_2=0$, etc. etc. *)
„addire diese Gleichungen zu der Grenzgleichung (II. §. 84.),
„setze nachher die Coefficienten von
„ $(\delta y)_b, (\delta y)_a, (\delta z)_b, (\delta z)_a, (\partial\delta y)_b$ etc. etc. etc. etc.
„alle einzeln gleich Null, und eliminire zuletzt aus allen die-
„sen Gleichungen sowohl die Unbestimmten α, β, γ, etc.,
„als auch die eben so unbestimmten $\lambda_b, \lambda_a, (\partial\lambda)_b, (\partial\lambda)_a$, etc.,
„so wird man die Gleichungen erhalten, welche in Verbin-
„dung mit den etwa noch gegebenen Gleichungen
„ $\varphi=0, \varphi_1=0$, etc. etc. zur Bestimmung der aus (I.)
„eingehenden willkührlichen Constanten genommen werden
„müssen."

Anmerkung 1. Man kann auch sogleich aus den Gleichungen (3. 4.) und $\psi=0$, y, z und λ in x mit den eingehenden willkührlichen Constanten bestimmen, diese Werthe in die letzterwähnte Gleichung setzen, und nun die Coefficienten alle einzeln $=0$ machen, und dann bloß die unbestimmten α, β, γ, etc. eliminiren.

Anmerkung 2. Es ist übrigens klar, daß diese letztere Methode des (§. 89.) auch in dem Falle des (§. 87.) angewandt werden kann, wo bloß $\psi(y, z)=0$ gegeben ist.

Beispiel. Dasselbe, was (§. 87.) aufgestellt ist, nur mit dem Unterschiede, daß die Fläche, in welcher die gesuchte kürzeste Linie liegen soll, nicht selbst gegeben ist, sondern nur eine Eigenschaft ihrer Tangenten an jedem ihrer Punkte.

§. 90. Zusatz 3.

Um nun, nachdem die Werthe gefunden sind, welche

---

*) Diese Gleichungen finden auch statt, wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, etc. nicht Null seyn, sondern nur unverändert denselben Werth behalten sollen. Das Verfahren bleibt also dann dasselbe.

$\delta(U_{b \div a}) = 0$ machen, das Maximum von dem Minimo zu unterscheiden, nehme man $\delta^2(U_{b \div a})$ und zwar

$$\delta^2(U_{b \div a}) = \int_{b \div a} (\delta^2 V) . \partial x = \int_{b \div a} \delta^2 (V + \lambda . \psi) . \partial x,$$

wo man sich unter λ entweder den vorigen Ausdruck (Funktion von x) oder besser eine noch unbestimmte Funktion von x denken mag, welche in die vorige übergehen kann, (die aber nach y, y_1, y_2, etc., z, z_1, z_2, etc. constant ist, d. h. diese letztern Ausdrücke explicit nicht enthält.).

Nun denke man sich zuvörderst λ als diejenige Funktion von x, welche, wenn man die mit $\delta^2 y, \delta^2 z, \partial\delta^2 y, \partial\delta^2 z$, etc. behafteten Glieder theilweise integrirt, nach (E. §. §. 60. 62.), die zuletzt noch unter dem Integralzeichen und allein mit $\delta^2 y, \delta^2 z$ (aber nicht mehr mit deren Ableitungen) behafteten Glieder, vermöge der Gleichungen (I. (3. 4.)), der Null gleich machen, so daß dann $\delta^2 y, \partial\delta^2 y$, etc. $\delta^2 z, \partial\delta^2 z$ etc. bloß noch außerhalb des $\int$ Zeichens vorkommt, und bloß für $x = a$ und $x = b$ genommen. — Unter dem Integralzeichen $\int$ kommen dann mit zweiten Variationen oder deren Ableitungen behaftete Glieder nicht mehr vor, sondern bloß noch

$\delta y, \partial\delta y, \partial^2\delta y$, etc. so wie auch $\delta z, \partial\delta z$, etc. etc.

Aus diesem Ausdruck (der noch unter dem Integralzeichen steht) eliminirt man nachgehends die Variationen $\delta z, \partial\delta z$, etc. entweder alle, oder doch so viele der höchsten Ableitungen von δz, als durch die Gleichungen

$$\delta\psi = 0, \quad \partial\delta\psi = 0, \quad \partial^2\delta\psi = 0, \quad \text{etc. etc.}$$

gegeben sind, und behandelt dann das entstehende Resultat nach den früher mitgetheilten Regeln, ohne weitere Hindernisse, jedem besonderen Falle angemessen.

§. 91. Zusatz 4.

Sollen auch noch die Werthe b und a gesucht werden, welche das Maximum oder Minimum liefern von $U_{b \div a}$, unter allen durch $(U_{b \div a})_{(\alpha)}$ oder $(U_\alpha)_{b \div a}$ ausgedrückten Werthen, so vermehrt sich die Gleichung $\delta(U_{b \div a}) = 0$

um $V_b.\delta b - V_a.\delta a$, welche Vermehrung die allgemeine Gleichung völlig ungeändert läßt und nur die Grenzgleichung trifft.

Alles übrige bleibt ungeändert dasselbe.

§. 92. Aufgabe.

Es ist gegeben

$V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_m, z, z_1, z_2, \ldots z_n, w, w_1, w_2 \ldots w_p)$ und $U = \int V.\partial x$. Man soll y, z und w als Funktionen von x so finden, daß U ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle durch y_x, z_x, w_x vorgestellten, nächst größern und nächst kleinern Werthe von y, z, und w.

Auflösung. Nimmt man

$$U_x = \int (V_x).\partial x$$

und versteht unter V_x das was aus V wird, wenn y, z, w, in y_x, z_x, w_x übergehen, so stellt $(U_x)_{b \div a}$ diese Nachbar-Werthe von U vor, in Beziehung auf welche $U_{b \div a}$ selbst ein Maximum oder Minimum werden soll.

Es wird nun nach (B. §. 5. §. 6. und E. §. 67.) oder nach (B. §. 12.):

$$\delta(U_{b \div a}) = \int_{b \div a} \underset{a+b=m}{S}.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right]\delta y.\partial x +$$

$$+\left(\underset{b+c+d=m-1}{S}.\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^b \delta y\right]\right)_{b \div a}$$

$$+\int_{b \div a} \underset{a+b=n}{S}.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial z_a}\right)\right]\delta z.\partial x +$$

$$+\left(\underset{b+c+d=n-1}{S}.\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial z_{c+d+1}}\right).\partial^b \delta z\right]\right)_{b \div a}$$

$$+\int_{b \div a} \underset{a+b=p}{S}.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial w_a}\right)\right]\delta z.\partial x +$$

$$+\left(\underset{b+c+d=p-1}{S}.\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial w_{c+d+1}}\right).\partial^b \delta w\right]\right)_{b \div a}$$

Setzt man daher nach (§. 6.) $\partial(U_{b+a})=0$, so erhält man nach (E. §. 95.):

$$\text{I. } 1)\ \underset{a+b=m}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right]=0,\quad 2)\ \underset{a+b=n}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial z_a}\right)\right]=0,$$

$$3)\ \underset{a+b=p}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial w_a}\right)\right]=0,$$

welches die allgemeinen Gleichungen des Maximums und Minimums sind; und noch

$$\text{II. }\left\{\begin{aligned}&\left(\underset{b+c+d=m-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta y\right]\right)_{b+a}\\+&\left(\underset{b+c+d=n-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial z_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta z\right]\right)_{b+a}\\+&\left(\underset{b+c+d=p-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial w_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta w\right]\right)_{b+a}\end{aligned}\right\}=0,$$

welches die Grenzgleichung ist.

Betrachten wir nun die allgemeinen Gleichungen (I.), so finden wir, daß (n. 1.) nach y von der $2m^{ten}$, nach z von der $m+n^{ten}$ und nach w von der $m+p^{ten}$ Ordnung seyn wird. Eben so ist (n. 2.) nach y, von der $m+n^{ten}$,
nach z, von der $2n^{ten}$,
nach w, von der $n+p^{ten}$ Ordnung.
Endlich ist (n. 3.) ebenfalls eine Differentialgleichung und zwar nach y, von der $m+p^{ten}$,
nach z, von der $n+p^{ten}$
und nach w, von der $2p^{ten}$ Ordnung. Folglich erhält man nach (E. §. 104.) y, z und w in x ausgedrückt mit $2m+2n+2p$ willkührlichen Constanten.

Gerade eben so viele Glieder hat nun die Gleichung (II.). Sind daher nicht noch Gleichungen oder andere Bedingungen gegeben, die an den Grenzen d. h. für $x=a$ und $x=b$ erfüllt werden sollen, so ist jeder einzelne Coefficient von (II.)

der Null gleich, und man hat also dann im Allgemeinen eben so viele Gleichungen als willkührliche Constanten, so daß im Allgemeinen diese Constanten ihre Bestimmung erhalten werden. *)

Sind aber noch Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. gegeben, zwischen y_b, y_a, z_b, z_a, w_b, w_a, $(\partial y)_b$ etc. etc.; oder sollen solche Funktionen φ, φ_1, φ_2, etc. unverändert denselben Werth behalten, für alle nächstangrenzenden Werthe y_x, z_x, w_x, etc., so addirt man zu $\delta(U_{b \div a})$ noch $\alpha.\delta\varphi+\beta.\delta\varphi_1+\gamma.\delta\varphi_2+\ldots=0$ hinzu, wodurch bloß die Grenzgleichung geändert wird (E. §. 95.), und muß aus den $2m+2n+2p$ Gleichungen, in welche die Grenzgleichung zerfällt, erst die unbestimmten α, β, γ, etc. etc. eliminiren, so daß die Zahl der zur Bestimmung der $2m+2n+2p$ willkührlichen Constanten, hervorgehenden Gleichungen geringer wird, so bald nicht noch die Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, etc. etc. hinzutreten, welches jedoch nicht der Fall ist, wenn φ, φ_1, etc. etc. bloß unverändert denselben, nicht gegebenen Werth, behalten sollen. In diesem letztern Falle allein bleiben einige der Constanten, im Allgemeinen, unbestimmt, und können noch anderen vorhandenen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Was endlich die Unterscheidung des Maximi vom Minimo betrifft, für die gefundenen Funktionen y, z, w, welche $\delta(U_{b \div a})=0$ machen, so bestimmt man $\delta^2(U_{b \div a})$ und behandelt solches genau nach (§. 85.), und bei einiger Aufmerksamkeit auf den daselbst angewandten Gang wird man finden, daß $U_{b \div a}$ allemal ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ seyn wird, so oft

*) In der „Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung." Berlin 1823 p. 156. findet man die Meinung ausgesprochen, daß y, z, w in x mit $m+n+4p$ willkührlichen Constanten ausgedrückt werden würden, wo p die größeste der Zahlen m, n, p. — Daher erscheint dort diese Aufgabe als eine unbestimmte, die sie jedoch, wenn man (E. §. §. 102 — 105.) genau überlegt, im Allgemeinen nicht ist.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}.f^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m . \partial z_n}.fg + \frac{\partial^2 V}{\partial y_n^2}.g^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m . \partial w_p}.fh +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial z_n . \partial w_p}.gh + \frac{\partial^2 V}{\partial w_p^2}.h^2$$

für jeden reellen Werth von f, g und h, und für jeden Werth von x zwischen a und b, beständig ein und dasselbe Zeichen behält (einige Nullenwerthe mit eingeschlossen) und zwar beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ wird. *) Die übrigen, (§. 85.) gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

§. 93. Zusatz 1.

Ist aber noch eine Gleichung

$$\psi(x, y, z, w, y_1, z_1, w_1, \ldots y_p, z_q, w_r) = 0$$

zwischen x, y, z, w, und ihren Ableitungen gegeben, die für jeden Werth von x (und nicht bloß an den Grenzen d. h. nicht nur für $x=a$ und $x=b$) gelten soll, so wird man z erst aus V eliminiren müssen, und dazu wiederum die Methode des (§. 89.) anwenden. — Man setzt also durchgehends $V + \lambda . \psi$ statt V in dem vorhergehenden (§. 92.), und nimmt für λ diejenige Funktion von x, welche in $\delta(U_{b \div a})$ den mit δw behafteten und unter dem Integralzeichen $\int$ noch stehenden Theil zu Null macht, und denkt sich die Constanten, welche aus dieser Gleichung, in die Bestimmung von λ eingehen werden, so genommen, daß auch die mit $(\delta w)_b$, $(\partial \delta w)_b$, $(\partial^2 \delta w)_b$, etc. etc. behafteten Glieder ebenfalls wegfallen, bis auf diejenigen

$(\delta w)_a$, $(\partial \delta w)_a$, etc. welche vielleicht deshalb noch unbestimmt bleiben (und bleiben können), weil die Gleichung $\psi = 0$ eine Differentialgleichung ist, also auch $\delta\psi = 0$ in Bezug auf

---

*) Sowohl das Resultat des (§. 85.) als auch das gegenwärtige scheint noch nirgends ausgesprochen, überhaupt diese Untersuchung weder für den einfachern noch für den zusammengesetztern Fall noch nirgends angestellt worden zu seyn.

anwenden wollte, würde man aus der Gleichung $\partial\psi=0$, d. h. aus

$$(\mathfrak{P}.)\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\psi}{\partial y}.\partial y+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}.\partial\partial y+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_p}.\partial^p\partial y\\ +\frac{\partial\psi}{\partial z}.\partial z+\frac{\partial\psi}{\partial z_1}.\partial\partial z+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial z_q}.\partial^q\partial z\end{array}\right\}=0$$

weder ∂z in ∂y, noch ∂y in ∂z ausdrücken können, so lange nicht y und z bekannte Funktionen von x sind, so daß auch die Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{P}$.) bereits als Funktionen von x erscheinen.

Es wird daher gerathener seyn, zur Elimination von ∂z, etc. einen Weg einzuschlagen, der mit dem (E. §. 1.) angegebenen analog, wenn auch etwas zusammengesetzter ist. Zu dem Ende bemerke man, daß, was auch λ seyn mag, doch immer, wegen $\psi=0$ auch $\lambda.\psi=0$ und $V+\lambda.\psi=V$ seyn wird, also auch

1) $\partial U=\int(V+\lambda.\psi).\partial x$;

folglich, wenn man in (§. 84. n. 3—6.) $V+\lambda.\psi$ statt V setzt, noch genau wie im (§. 84.)

2) $\partial(U_{b+m})=\int_{b+m}(Y.\partial y+Z.\partial z).\partial x+$
$(S.[P_b.\partial^b\partial y]+S.[Q_b.\partial^b\partial z])_{b+m}$

nur daß jetzt in Y und Z und P_b und Q_b, $V+\lambda.\psi$ statt V gesetzt steht, während b nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen vorstellt.

Denkt man sich nun $\partial(U_{b+m})=0$ gesetzt (§. 6.), und dabei λ als eine solche Funktion von x, daß

I. { 3) $Z=0$ wird, so wird nach (E. §. 93. §. 94.) auch 4) $Y=0$ seyn müssen

$$\text{wo}\quad Y=S.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial(V+\lambda.\psi)}{\partial y_a}\right)\right]_{a+b=m}$$

$$\text{und}\quad Z=S.\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial(V+\lambda.\psi)}{\partial z_a}\right)\right]_{a+b=n}\quad\text{ist.}$$

Die Grenzgleichung bleibt wiederum genau die (II.) des

(§. 84.), nur daß man sich δz, $\partial\delta z$ etc. ... in δy, $\partial\delta y$, etc. bereits ausgedrückt denken muß, und überall $V + \lambda . \psi$ statt V. — Eliminirt man nun λ aus (3. und 4.) nach (E. §. 102.); so erhält man eine Gleichung, die mit $\psi = 0$ in Verbindung y und z in x mit einer Anzahl willkührlicher Constanten liefern wird.

Was nun die Grenzgleichung (II.) betrifft, so werden erstlich, weil z in y und dann auch δz in δy, etc., durch eine Differentialgleichung von der $q$ten Ordnung gegeben ist, entweder q der Ausdrücke $(\delta z)_a$, $(\partial\delta z)_a$, $(\partial^2\delta z)_a$ etc. etc. völlig unbestimmt bleiben, für jedes beliebig gedachte δy, oder durch gegebene Gleichungen zwischen

$$y_b, \; z_b, \; y_a, \; z_a, \; (\partial y)_b, \; (\partial y)_a, \; (\partial z)_b \text{ etc. etc. etc.}$$

(mittelst welcher die in z aus $\psi = 0$ eingehenden q willkührlichen Constanten näher bestimmt werden sollen) von den übrigen derselben Ausdrücke abhängig seyn und aus der Grenzgleichung eliminirt werden können; und da λ aus den Gleichungen (3. und 4.) durch eine Differentialgleichung bestimmt wird, so kann man die dadurch in λ bleibenden willkührlichen Constanten noch so annehmen, daß in der Grenzgleichung die mit $(\delta z)_b$, $(\partial\delta z)_b$, etc. behafteten Glieder, die noch nicht weggeschafft sind, von selbst wegfallen, indem man ihre Coefficienten $= 0$ setzt. — Dann bleiben, ohne daß das Auffinden des δz in δy etc. etc., der Elimination wegen, nöthig geworden wäre, nur noch die mit

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$, etc. ... behafteten Glieder in der Grenzgleichung übrig, deren Coefficienten einzeln $= 0$ seyn müssen, wenn zwischen $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$ etc. nicht noch Gleichungen gegeben sind. Und wären noch solche Gleichungen gegeben, so würde man so viele der dadurch abhängigen $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$ etc. etc. nach (E. §. 1.) vorher eliminiren, übrigens dann allemal die Gleichungen finden, welche zur Bestimmung der Constanten dienen.

Für dieses Auffinden der letzteren Gleichungen kann

allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, dann U nothwendig ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ seyn müsse; u. s. w. f. *)

Anmerkung. Auch hier bemerke man wieder, daß δy eine ganz beliebige, höchstens noch einigen Bedingungen unterworfene in jedem Falle aber eine ganz unbestimmte, jeden Augenblick anders gedachte Funktion von x seyn soll, und daß man daher an ein Integriren nur unter dieser Voraussetzung denken kann, weshalb eben kein anderer Weg als der hier betretene eingeschlagen werden darf, um doch so viel wie möglich von dem unbestimmten δy außerhalb des $\int$ Zeichens zu bringen. Dieselben Betrachtungen sind aber auch zugleicher Zeit die Grundlagen zur Auffindung der Bedingungen einer unabhängigen Integrabilität, eben weil es hier auch darauf ankommt, zu integriren, während δy eine ganz beliebige Funktion von x bleibt.

§. 80. Aufgabe.

Es ist V und U wie im (§. 77.). Man soll die Werthe von y, a und b suchen, welche U_{b+a} zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf die nächst größern und nächst kleinern Werthe $y_{,,}$ von y, und $a_{,,}$, $b_{,,}$ von a und von b.

Auflösung. Nimmt man hier

$V_{,,} = f(x, y_{,,}, \partial(y_{,,}), \partial^2(y_{,,}))$ und $U_{,,} = \int(V_{,,})\cdot\partial x$

und noch $(U_{b+a})_{(,,)} = (U_{,,})_{b_{,,}+a_{,,}}$, wo $b_{,,}$, $a_{,,}$ Werthe von x (E. §. 49.) sind, so sind $(U_{b+a})_{(,,)}$ die Nachbar-Werthe in Bezug auf welche das Maximum oder Minimum von U gesucht wird.

Man hat nun, die Bezeichnung (B. §. 29.) gebrauchend, genau wie in den (§. §. 73—75.) für den einfachern Fall der hiesigen Aufgabe gefunden wurde,

1) $\delta(U_{b+a}) = \delta_1(U_{b+a}) + V_b\cdot\delta b - V_a\cdot\delta a$

2) $\delta^2(U_{b+a}) = \delta_1^2(U_{b+a}) + 2(\delta_1 V)_b\cdot\delta b - 2(\delta_1 V)_a\cdot\delta a +$
$+ (\partial V)_b\cdot\delta b^2 - (\partial V)_a\cdot\delta a^2 + V_b\cdot\delta^2 b - V_a\cdot\delta^2 a,$

wo $\delta_1(U_{b+a}) = \int_{b+a}(\delta_1 V)\cdot\partial x$, und $\delta_1^2(U_{b+a}) = \int_{b+a}(\delta_1^2 V)\cdot\partial x$

*) Vergl. Note zu (§. 69.).

$\delta(U_{b\div a})=0$ machen, das Maximum von dem Minimo zu unterscheiden, nehme man $\delta^2(U_{b\div a})$ und zwar

$$\delta^2(U_{b\div a})=\int_{b\div a}(\delta^2 V).\partial x=\int_{b\div a}\delta^2(V+\lambda.\psi).\partial x,$$

wo man sich unter λ entweder den vorigen Ausdruck (Funktion von x) oder besser eine noch unbestimmte Funktion von x denken mag, welche in die vorige übergehen kann, (die aber nach y, y_1, y_2, etc., z, z_1, z_2, etc. constant ist, d. h. diese letztern Ausdrücke explicit nicht enthält.).

Nun denke man sich zuvörderst λ als diejenige Funktion von x, welche, wenn man die mit $\delta^2 y, \delta^2 z, \partial\delta^2 y, \partial\delta^2 z$, etc. behafteten Glieder theilweise integrirt, nach (E. §. §. 60. 62.), die zuletzt noch unter dem Integralzeichen und allein mit $\delta^2 y, \delta^2 z$ (aber nicht mehr mit deren Ableitungen) behafteten Glieder, vermöge der Gleichungen (1. (3. 4.)), der Null gleich machen, so daß dann $\delta^2 y, \partial\delta^2 y$, etc. $\delta^2 z, \partial\delta^2 z$ etc. bloß noch außerhalb des $\int$ Zeichens vorkommt, und bloß für $x=a$ und $x=b$ genommen. — Unter dem Integralzeichen $\int$ kommen dann mit zweiten Variationen oder deren Ableitungen behaftete Glieder nicht mehr vor, sondern bloß noch

$\delta y, \partial\delta y, \partial^2\delta y$, etc. so wie auch $\delta z, \partial\delta z$, etc. etc.

Aus diesem Ausdruck (der noch unter dem Integralzeichen steht) eliminirt man nachgehends die Variationen $\delta z, \partial\delta z$, etc. entweder alle, oder doch so viele der höchsten Ableitungen von δz, als durch die Gleichungen

$$\delta\psi=0,\ \partial\delta\psi=0,\ \partial^2\delta\psi=0,\ \text{etc. etc.}$$

gegeben sind, und behandelt dann das entstehende Resultat nach den früher mitgetheilten Regeln, ohne weitere Hindernisse, jedem besonderen Falle angemessen.

§. 91. Zusatz 4.

Sollen auch noch die Werthe b und a gesucht werden, welche das Maximum oder Minimum liefern von $U_{b\div a}$, unter allen durch $(U_{b\div a})_{(*)}$ oder $(U_x)_{b_n\div a_n}$ ausgedrückten Werthen, so vermehrt sich die Gleichung $\delta(U_{b\div a})=0$

Anmerkung. Nachdem wir in den (§. §. 68 — 80.) die einfacheren Fälle dieser Gattungen von Aufgaben betrachtet und durchgeführt haben, einmal wo $V=f(x, y, \partial y)$ und dann, wo $V=f(x, y, \partial y, \partial^2 y)$, so wollen wir zu der allgemeinern Aufgabe fortschreiten.

§. 81. Aufgabe.

Es ist gegeben $V=f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_m)$, wo y_p für jede Zahl p die Ableitung $\partial^p y$ nach x genommen vorstellen soll; ferner

$$U=\int V.\partial x.$$

Man soll die Funktion y von x suchen, welche das zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommene Integral $U_{b\div a}$ zu einem Maximum oder Minimum macht, entweder

1) in Bezug auf die nächst größern und nächst kleinern durch y_x bezeichneten Funktionen, als Werthe von y, wie beliebig sie auch genommen werden mögen,

oder

2) in Bezug auf diejenigen Werthe y_x von y, die aber an den Grenzen noch gegebenen Gleichungen von der Form $\varphi(y_b, y_a, (\partial y)_b, (\partial y)_a, (\partial^2 y)_b, (\partial^2 y)_a \ldots (\partial^m y)_b, (\partial^m y)_a)=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, etc. etc. genügen,

oder

3) in Bezug auf diejenigen Werthe y_x von y, die nicht allen diesen Gleichungen oder die gar keiner derselben genügen, dagegen einigen oder allen dieser Funktionen φ, φ_1, φ_2, etc. unveränderlich dieselben bleibenden Werthe lassen (die nicht Null und auch nicht gegeben sind.). *)

Auflösung. Man hat hier nach (B. §. 5. oder B. §. 9.):

---

*) Wäre der unveränderliche Werth φ z. B. gegeben und $=\gamma$, so hätte man $\varphi=\gamma$ oder $\varphi-\gamma=0$. oder $\psi=0$, wenn man $\varphi-\gamma$ durch ψ vorstellte, und es wäre also dies derselbe Fall, wo an den Grenzen eine Gleichung $\varphi=0$ oder $\psi=0$ gegeben ist.

Setzt man daher nach (§. 6.) $\delta(U_{b+a})=0$, so erhält man nach (E. §. 95.):

$$\text{I. } 1)\ \underset{a+b=m}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right]=0,\quad 2)\ \underset{a+b=n}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial z_a}\right)\right]=0,$$

$$3)\ \underset{a+b=p}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial w_a}\right)\right]=0,$$

welches die allgemeinen Gleichungen des Maximums und Minimums sind; und noch

$$\text{II. }\left\{\begin{array}{l}\left(\underset{b+c+d=m-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta y\right]\right)_{b+a}\\ +\left(\underset{b+c+d=n-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial z_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta z\right]\right)_{b+a}\\ +\left(\underset{b+c+d=p-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial w_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta w\right]\right)_{b+a}\end{array}\right\}=0,$$

welches die Grenzgleichung ist.

Betrachten wir nun die allgemeinen Gleichungen (I.), so finden wir, daß (n. 1.) nach y von der $2m^{ten}$, nach z von der $m+n^{ten}$ und nach w von der $m+p^{ten}$ Ordnung seyn wird. Eben so ist (n. 2.) nach y, von der $m+n^{ten}$,
nach z, von der $2n^{ten}$,
nach w, von der $n+p^{ten}$ Ordnung.
Endlich ist (n. 3.) ebenfalls eine Differentialgleichung und zwar nach y, von der $m+p^{ten}$,
nach z, von der $n+p^{ten}$
und nach w, von der $2p^{ten}$ Ordnung. Folglich erhält man nach (E. §. 104.) y, z und w in x ausgedrückt mit $2m+2n+2p$ willkührlichen Constanten.

Gerade eben so viele Glieder hat nun die Gleichung (II.). Sind daher nicht noch Gleichungen oder andere Bedingungen gegeben, die an den Grenzen d. h. für $x=a$ und $x=b$ erfüllt werden sollen, so ist jeder einzelne Coefficient von (II.)

δy_b, δy_a, $(\partial \delta y)_b$, $(\partial \delta y)_a$, etc. etc.

eliminiren, als solche Gleichungen gegeben sind, und die Coefficienten der entstehenden Eliminationsgleichung (in so ferne die übrigen der von δy abhängigen Ausdrücke für $x = a$ und $x = b$ genommen, als von einander ganz unabhängige Werthe habend gedacht werden können) einzeln der Null gleich seyn, so daß diese Gleichungen, in welche die Grenzgleichung zerfällt, in Verbindung mit den etwa noch gegebenen Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. etc. zur Bestimmung der Constanten entweder zum Theil oder ganz ausreichen werden. — Bleiben noch einige der Constanten unbestimmt, so können sie, noch andern Bedingungen der Aufgabe Genüge leistend bestimmt werden; — alles wie wir solches (§. §. 68—80.) für die einfachern Fälle bereits im Detail gesehen haben.

Geht man zuletzt zu $\delta^2(U_{b+a})$ über, so findet sich, den Gang (§. §. 68 und 79.) wiederholend und für diesen allgemeinen Fall erweiternd, daß U_{b+a} in jeder der drei angegebenen Beziehungen ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, so oft $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b, beständig ein und dasselbe Zeichen behält, d. h. beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist, (einige Nullen-Werthe mit eingeschlossen).

Ob aber, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}$ für jeden Werth von x zwischen a und b nicht einerlei sondern verschiedene Zeichen erhält, dann unser U_{b+a} weder ein Maximum noch ein Minimum seyn werde, muß jedesmal noch einer besondern Untersuchung unterworfen bleiben.

Ist endlich $\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2} = 0$ (für jeden Werth von x zwischen a und b) so muß die Untersuchung für diesen Ausnahmsfall besonders geführt werden (wie solches (§. §. 69 und 79.) in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}.f^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m . \partial z_n}.fg + \frac{\partial^2 V}{\partial y_n^2}.g^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m . \partial w_p}.fh +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial z_n . \partial w_p}.gh + \frac{\partial^2 V}{\partial w_p^2}.h^2$$

für jeden reellen Werth von f, g und h, und für jeden Werth von x zwischen a und b, beständig ein und dasselbe Zeichen behält (einige Nullenwerthe mit eingeschlossen) und zwar beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ wird. *) Die übrigen, (§. 85.) gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

§. 93. Zusatz 1.

Ist aber noch eine Gleichung

$$\psi(x, y, z, w, y_1, z_1, w_1, \ldots y_p, z_q, w_r) = 0$$

zwischen x, y, z, w, und ihren Ableitungen gegeben, die für jeden Werth von x (und nicht bloß an den Grenzen d. h. nicht nur für $x = a$ und $x = b$) gelten soll, so wird man z erst aus V eliminiren müssen, und dazu wiederum die Methode des (§. 89.) anwenden. — Man setzt also durchgehends $V + \lambda.\psi$ statt V in dem vorhergehenden (§. 92.), und nimmt für λ diejenige Funktion von x, welche in $\delta(U_{b \div a})$ den mit δw behafteten und unter dem Integralzeichen $\int$ noch stehenden Theil zu Null macht, und denkt sich die Constanten, welche aus dieser Gleichung in die Bestimmung von λ eingehen werden, so genommen, daß auch die mit $(\delta w)_b$, $(\partial\delta w)_b$, $(\partial^2\delta w)_b$, etc. etc. behafteten Glieder ebenfalls wegfallen, bis auf diejenigen

$(\delta w)_a$, $(\partial\delta w)_a$, etc. welche vielleicht deshalb noch unbestimmt bleiben (und bleiben können), weil die Gleichung $\psi = 0$ eine Differentialgleichung ist, also auch $\delta\psi = 0$ in Bezug auf

---

*) Sowohl das Resultat des (§. 85.) als auch das gegenwärtige scheint noch nirgends ausgesprochen, überhaupt diese Untersuchung weder für den einfachern noch für den zusammengesetztern Fall noch nirgends angestellt worden zu seyn.

δw eine Differentialgleichung seyn wird, von der p^{ten} Ordnung, weshalb z. B. $(\delta w)_a, (\partial\delta w)_a \ldots (\partial^{r-1}\delta w)_a$ eben so unbestimmt bleiben, als die r eingehenden Constanten willkührlich sind, wenn sie nicht und somit auch

$(\delta w)_a, (\partial\delta w)_a$, etc. etc. durch gegebene Gleichungen an den Grenzen, oder auf sonstige Weise ihre besondere Bestimmung erhalten; und dies bleibt unverändert, wenn auch noch solche Gleichungen wie (§. 92.), nehmlich

$\delta\varphi = 0, \delta\varphi_1 = 0$, etc. an den Grenzen gegeben, also

$$\alpha.\delta\varphi = 0, \beta.\delta\varphi_1 = 0, \text{ etc. etc.}$$

bereits zu $\delta(U_{b+a})$ addirt seyn sollten.

Ist aber auf diese Weise jede von w abhängige Variation aus $\delta(U_{b+a})$ eliminirt, so setzt man nach (§. 6.)

$\delta(U_{b+a}) = 0$ und die Gleichung zerfällt dann nach (E. §. 95.) genau in die beiden Gleichungen (§. 92. I. n. 1. und n. 2.), während die (I. n. 3.) bereits (zur Bestimmung von λ) gegeben ist (versteht sich, daß man überall $V + \lambda.\psi$ statt V gesetzt denkt), — und in die Grenzgleichung (II.), in welcher nur die mit den von w abhängigen Variationen behafteten Glieder bereits Null gesetzt sind (zur vollendeten Bestimmung von λ). Es finden also für die gegenwärtige Aufgabe genau dieselben Gleichungen (I. 1, 2, 3. und II.) statt wie (§. 92.), nur $V + \lambda.\psi$ überall statt V gesetzt. Man wird deshalb aus (I. 1, 2, 3.) in Verbindung mit $\psi = 0$, die y, z, w und λ, in x bestimmen, mit der gehörigen Zahl willkührlicher Constanten, diese Werthe in die Gleichung (II.) substituiren, und dann die Coefficienten in dieser letztern alle einzeln $= 0$ setzen, und dadurch die Constanten selbst bestimmen.

§. 94. Zusatz 2.

Wäre dieselbe Aufgabe (§. 92.) gegeben, jedoch y, z, w, durch zwei solche Gleichungen wie $\psi = 0$ (§. 92.), nehmlich

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = 0$$

als Funktionen von x von einander abhängig, so würde man vorher z und w eliminiren müssen, und dabei eine der bisher angewandten analoge Methode anwenden.

Man wird nehmlich $V+\lambda.\psi+\lambda_1.\psi_1$ statt V setzen, $\delta(U_{b+a})$ genau so erhalten wie (§. 92.), nur überall $V+\lambda.\psi+\lambda_1.\psi_1$, wo jetzt V steht, dann λ und λ_1 als solche Funktionen von x sich denken, daß die Gleichungen I. (n. 2. u. n. 3.) statt finden (immer $V+\lambda.\psi+\lambda_1.\psi_1$ statt V gedacht), die dadurch in λ und λ_1 eingehenden Constanten so annehmen, daß auch die mit

$$\delta z_b,\ (\partial\delta z)_b \text{ etc. etc.},\ (\delta w)_b,\ (\partial\delta w)_b, \text{ etc. etc.}$$

behafteten Glieder, so viel deren durch die Gleichungen $\psi=0$, $\psi_1=0$ abhängig sind, aus $\delta(U_{b+a})$ von selbst wegfallen, und dann wird die Gleichung $\delta(U_{b+a})=0$ noch in die Gleichung (I. n. 1.) und in die Grenzgleichung (II.) zerfallen (überall $V+\lambda.\psi+\lambda_1.\psi_1$ statt V gesetzt), aus welcher letztern jedoch schon alle mit

$$(\delta z)_b,\ (\partial\delta z)_b, \text{ etc. etc. } (\delta w)_b,\ (\partial\delta w)_b, \text{ etc.},$$

behafteten Glieder weggefallen sind, in so ferne man ihre Coefficienten zur völligen Bestimmung von λ und λ_1 der Null gleich gesetzt hat. — Dies gilt alles noch, wenn auch an den Grenzen d. h. für $x=a$ und $x=b$, selbst noch Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. oder doch $\delta\varphi=0$, $\delta\varphi_1=0$, etc. (§. 92.) gegeben, und deshalb $\alpha.\delta\varphi=0$; $\beta.\delta\varphi_1=0$, etc. etc. bereits zu $\delta(U_{b+a})$ addirt worden sind.

Man hat also genau die Gleichungen (§. 92. I. 1, 2 und 3. und II.), nur $V+\lambda.\psi+\lambda_1.\psi_1$ überall statt V gesetzt; und man wird aus (I. 1, 2, 3.) in Verbindung mit $\psi=0$, $\psi_1=0$, die Funktionen y, z, w, λ und λ_1, in x nebst den eingehenden willkührlichen Constanten bestimmen, diese Werthe in (II.) substituiren, und dann alle Coefficienten in (II.) einzeln, der Null gleich setzen, um so die Gleichungen zur Bestimmung dieser Constanten zu erhalten.

man nun sich leicht die nachstehende praktische Regel abstrahiren:

„Aus den zwischen

„ y_b, y_a, $(\partial y)_b$, $(\partial y)_a$, etc. z_b, z_a, $(\partial z)_b$, etc. etc.

„gegebenen Gleichungen $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, bilde man sich

„ $\alpha.\delta\varphi=0$, $\beta.\delta\varphi_1=0$, $\gamma.\delta\varphi_2=0$, etc. etc. *)

„addire diese Gleichungen zu der Grenzgleichung (II. §. 84.),

„setze nachher die Coefficienten von

„ $(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\delta z)_b$, $(\delta z)_a$, $(\partial\delta y)_b$ etc. etc. etc. etc.

„alle einzeln gleich Null, und eliminire zuletzt aus allen diesen Gleichungen sowohl die Unbestimmten α, β, γ, etc.,

„als auch die eben so unbestimmten λ_b, λ_a, $(\partial\lambda)_b$, $(\partial\lambda)_a$, etc.,

„so wird man die Gleichungen erhalten, welche in Verbin„dung mit den etwa noch gegebenen Gleichungen

„ $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, etc. etc. zur Bestimmung der aus (I.)

„eingehenden willkührlichen Constanten genommen werden „müssen."

Anmerkung 1. Man kann auch sogleich aus den Gleichungen (3. 4.) und $\psi=0$, y, z und λ in x mit den eingehenden willkührlichen Constanten bestimmen, diese Werthe in die letzterwähnte Gleichung setzen, und nun die Coefficienten alle einzeln $=0$ machen, und dann bloß die unbestimmten α, β, γ, etc. eliminiren.

Anmerkung 2. Es ist übrigens klar, daß diese letztere Methode des (§. 89.) auch in dem Falle des (§. 87.) angewandt werden kann, wo bloß $\psi(y, z)=0$ gegeben ist.

Beispiel. Dasselbe, was (§. 87.) aufgestellt ist, nur mit dem Unterschiede, daß die Fläche, in welcher die gesuchte kürzeste Linie liegen soll, nicht selbst gegeben ist, sondern nur eine Eigenschaft ihrer Tangenten an jedem ihrer Punkte.

§. 90. Zusatz 3.

Um nun, nachdem die Werthe gefunden sind, welche

---

*) Diese Gleichungen finden auch statt, wenn φ, φ_1, φ_2, etc. nicht Null seyn, sondern nur unverändert denselben Werth behalten sollen. Das Verfahren bleibt also dann dasselbe.

$\delta(U_{b+a})=0$ machen, das Maximum von dem Minimo zu unterscheiden, nehme man $\delta^2(U_{b+a})$ und zwar

$$\delta^2(U_{b+a})=\int_{b+a}(\delta^2 V).\partial x=\int_{b+a}\delta^2(V+\lambda.\psi).\partial x,$$

wo man sich unter λ entweder den vorigen Ausdruck (Funktion von x) oder besser eine noch unbestimmte Funktion von x denken mag, welche in die vorige übergehen kann, (die aber nach $y, y_1, y_2,$ etc., $z, z_1, z_2,$ etc. constant ist, d. h. diese letztern Ausdrücke explicit nicht enthält.).

Nun denke man sich zuvörderst λ als diejenige Funktion von x, welche, wenn man die mit $\delta^2 y, \delta^2 z, \partial\delta^2 y, \partial\delta^2 z,$ etc. behafteten Glieder theilweise integrirt, nach (E. §. §. 60. 62.), die zuletzt noch unter dem Integralzeichen und allein mit $\delta^2 y, \delta^2 z$ (aber nicht mehr mit deren Ableitungen) behafteten Glieder, vermöge der Gleichungen (I. (3. 4.)), der Null gleich machen, so daß dann $\delta^2 y, \partial\delta^2 y,$ etc. $\delta^2 z, \partial\delta^2 z$ etc. bloß noch außerhalb des $\int$ Zeichens vorkommt, und bloß für $x=a$ und $x=b$ genommen. — Unter dem Integralzeichen $\int$ kommen dann mit zweiten Variationen oder deren Ableitungen behaftete Glieder nicht mehr vor, sondern bloß noch

$$\delta y, \partial\delta y, \partial^2\delta y, \text{ etc.} \quad \text{so wie auch} \quad \delta z, \partial\delta z, \text{ etc. etc.}$$

Aus diesem Ausdruck (der noch unter dem Integralzeichen steht) eliminirt man nachgehends die Variationen $\delta z, \partial\delta z,$ etc. entweder alle, oder doch so viele der höchsten Ableitungen von δz, als durch die Gleichungen

$$\delta\psi=0, \quad \partial\delta\psi=0, \quad \partial^2\delta\psi=0, \text{ etc. etc.}$$

gegeben sind, und behandelt dann das entstehende Resultat nach den früher mitgetheilten Regeln, ohne weitere Hindernisse, jedem besonderen Falle angemessen.

§. 91. Zusatz 4.

Sollen auch noch die Werthe b und a gesucht werden, welche das Maximum oder Minimum liefern von U_{b+a}, unter allen durch $(U_{b+a})_{(\alpha)}$ oder $(U_\alpha)_{b+a}$ ausgedrückten Werthen, so vermehrt sich die Gleichung $\delta(U_{b+a})=0$

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l} Y = \frac{\partial V}{\partial y} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right) + \partial^2\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right) = 0, \\ Z = \frac{\partial V}{\partial z} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right) = 0 \end{array}\right.$$

als allgemeine Gleichungen des Maximums und Minimums, dagegen

$$\text{II.}\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right)_b.(\delta y)_b + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_b.(\partial\delta y)_b + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)_b.(\delta z)_b \\ - \left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right)_a.(\delta y)_a - \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_a.(\partial\delta y)_a - \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)_a.(\delta z)_a \end{array}\right\} = 0$$

als die Grenzgleichung sich ergiebt, wo also die Gleichungen (I.) integrirt, y und z als Funktionen von x mit 6 willkührlichen Constanten geben, welche letztern nachgehends aus der Gleichung (II.) ihre Bestimmung erhalten, wie vorhin bemerkt, und in früheren namentlich (§. §. 70—80.) schon im Detail durchgeführt ist.

Man hat nun ferner, (V. §. 5. oder W. §. 10.):

$$1)\ \delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_1}.\delta y.\partial\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}.(\partial\delta y)^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial y_2}.\delta y.\partial^2\delta y + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1.\partial y_2}.\partial\delta y.\partial^2\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}.(\partial^2\delta y)^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial z}.\delta y.\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1.\partial z}.\partial\delta y.\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_2.\partial z}.\partial^2\delta y.\delta z +$$
$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.\delta z^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y.\partial z_1}.\delta y.\partial\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1.\partial z_1}.\partial\delta y.\partial\delta z +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_2.\partial z_1}.\partial^2\delta y.\partial\delta z + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z.\partial z_1}.\delta z.\partial\delta z + \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}.(\partial\delta z)^2 +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}.\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_1}.\partial\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial^2\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z}.\delta^2 z + \frac{\partial V}{\partial z_1}.\partial\delta^2 z$$

und (V. §. 6.):

$$2)\ \delta^2 U = \int(\delta^2 V).\partial x.$$

Integrirt man aber die 5 letzten Glieder von $\delta^2 V$ nach (E. §. §. 60. 62.) theilweise, so ist vermöge der allgemeinen Gleichungen (I.) das Integral derselben

$$(\mathfrak{A}.) \ldots = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right).\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z_1}.\delta z\right].$$

Setzt man daher nach (§. 6.) $\delta(U_{b+a})=0$, so erhält man nach (E. §. 95.):

$$\text{I. } 1)\ \underset{a+b=m}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right]=0,\quad 2)\ \underset{a+b=n}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial z_a}\right)\right]=0,$$

$$3)\ \underset{a+b=p}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial w_a}\right)\right]=0,$$

welches die allgemeinen Gleichungen des Maximums und Minimums sind; und noch

$$\text{II. }\left\{\begin{array}{l}\left(\underset{b+c+d=m-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta y\right]\right)_{b+a}\\ +\left(\underset{b+c+d=n-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial z_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta z\right]\right)_{b+a}\\ +\left(\underset{b+c+d=p-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial w_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta w\right]\right)_{b+a}\end{array}\right\}=0,$$

welches die Grenzgleichung ist.

Betrachten wir nun die allgemeinen Gleichungen (I.), so finden wir, daß (n. 1.) nach y von der $2m^{ten}$, nach z von der $m+n^{ten}$ und nach w von der $m+p^{ten}$ Ordnung seyn wird.
Eben so ist (n. 2.) nach y, von der $m+n^{ten}$,
nach z, von der $2n^{ten}$,
nach w, von der $n+p^{ten}$ Ordnung.
Endlich ist (n. 3.) ebenfalls eine Differentialgleichung und zwar nach y, von der $m+p^{ten}$,
nach z, von der $n+p^{ten}$
und nach w, von der $2p^{ten}$ Ordnung. Folglich erhält man nach (E. §. 104.) y, z und w in x ausgedrückt mit $2m+2n+2p$ willkührlichen Constanten.

Gerade eben so viele Glieder hat nun die Gleichung (II.). Sind daher nicht noch Gleichungen oder andere Bedingungen gegeben, die an den Grenzen d. h. für $x=a$ und $x=b$ erfüllt werden sollen, so ist jeder einzelne Coefficient von (II.)

$\frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}$) beständig ein und dasselbe Zeichen behalten d. h. fort während $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ sind, für jeden Werth von x zwischen a und b, in so ferne die Integrale zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommen werden. Der dann noch übrige Theil von $\delta^2(U_{b+a})$ oder $\int_{b+a}(\delta^2 V).\partial x$, ist nun, erstens der Ausdruck (A.) und dann noch der erste Theil von (B.) zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ genommen, nehmlich

$$\left(\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}-\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\right).\delta^2 y+\frac{\partial V}{\partial y_2}.\partial\delta^2 y+\frac{\partial V}{\partial z_1}.\delta^2 z\right)_{b+a}+$$

$$+(\alpha.\delta y^2+2\beta.\delta y.\partial\delta y+\gamma.(\partial\delta y)^2+2\varepsilon.\delta y.\delta z+2\zeta.\partial\delta y.\delta z+\vartheta.\delta z^2)_{b+a}$$

und da hier noch die 6 willkührlichen Constanten eingehen (in, α, β, γ, ε, ζ, ϑ), so wird man diese für jedes andere δy, $\delta^2 y$, etc. und für jedes andere δz, $\delta^2 z$, etc., jedesmal anders, immer aber so annehmen können, daß dieser Theil von $\delta^2(U_{b+a})$ entweder Null wird, oder doch mit dem Theile (C.) ein und dasselbe Zeichen erhält.

Es wird also U_{b+a} ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ seyn, in der angegebenen Beziehung, so oft

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}.\frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}>\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2.\partial z_1}\right)^2 \text{ und } \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\left(\text{oder } \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2}\right)$$

für jeden Werth von x zwischen a und b beständig $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ wird, (was für Grenzgleichungen auch noch statt finden mögen, denen durch die nächst größern und nächst kleinern Werthe y_n und z_n von y und z, genügt werden soll).

Ist aber dieser Gang wohl aufgefaßt, so wird man leicht für den allgemeinen Fall der Aufgabe (§. 84.) finden, daß U_{b+a} ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ seyn wird, in der gegebenen Beziehung, wenn für jeden Werth von x zwischen a und b jedesmal

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}.f^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m . \partial z_n}.fg + \frac{\partial^2 V}{\partial y_n^2}.g^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m . \partial w_p}.fh +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial z_n . \partial w_p}.gh + \frac{\partial^2 V}{\partial w_p^2}.h^2$$

für jeden reellen Werth von f, g und h, und für jeden Werth von x zwischen a und b, beständig ein und dasselbe Zeichen behält (einige Nullenwerthe mit eingeschlossen) und zwar beständig $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ wird. *) Die übrigen, (§. 85.) gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

§. 93. Zusatz 1.

Ist aber noch eine Gleichung

$$\psi(x, y, z, w, y_1, z_1, w_1, \ldots y_p, z_q, w_r)=0$$

zwischen $x, y, z, w,$ und ihren Ableitungen gegeben, die für jeden Werth von x (und nicht bloß an den Grenzen d. h. nicht nur für $x=a$ und $x=b$) gelten soll, so wird man z erst aus V eliminiren müssen, und dazu wiederum die Methode des (§. 89.) anwenden. — Man setzt also durchgehends $V+\lambda.\psi$ statt V in dem vorhergehenden (§. 92.), und nimmt für λ diejenige Funktion von x, welche in $\delta(U_{b\div a})$ den mit δw behafteten und unter dem Integralzeichen $\int$ noch stehenden Theil zu Null macht, und denkt sich die Constanten, welche aus dieser Gleichung in die Bestimmung von λ eingehen werden, so genommen, daß auch die mit $(\delta w)_b$, $(\partial\delta w)_b$, $(\partial^2\delta w)_b$, etc. etc. behafteten Glieder ebenfalls wegfallen, bis auf diejenigen $(\delta w)_a$, $(\partial\delta w)_a$, etc. welche vielleicht deshalb noch unbestimmt bleiben (und bleiben können), weil die Gleichung $\psi=0$ eine Differentialgleichung ist, also auch $\delta\psi=0$ in Bezug auf

*) Sowohl das Resultat des (§. 85.) als auch das gegenwärtige scheint noch nirgends ausgesprochen, überhaupt diese Untersuchung weder für den einfachern noch für den zusammengesetztern Fall noch nirgends angestellt worden zu seyn.

δw eine Differentialgleichung seyn wird, von der p^{ten} Ordnung, weshalb z. B. $(\delta w)_a$, $(\partial \delta w)_a \ldots (\partial^{r-1}\delta w)_a$ eben so unbestimmt bleiben, als die r eingehenden Constanten willkührlich sind, wenn sie nicht und somit auch

$(\delta w)_a$, $(\partial \delta w)_a$, etc. etc. durch gegebene Gleichungen an den Grenzen, oder auf sonstige Weise ihre besondere Bestimmung erhalten; und dies bleibt unverändert, wenn auch noch solche Gleichungen wie (§. 92.), nehmlich

$\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, etc. an den Grenzen gegeben, also

$$\alpha . \delta\varphi = 0, \quad \beta . \delta\varphi_1 = 0, \text{ etc. etc.}$$

bereits zu $\delta(U_{b+a})$ addirt seyn sollten.

Ist aber auf diese Weise jede von w abhängige Variation aus $\delta(U_{b+a})$ eliminirt, so setzt man nach (§. 6.)

$\delta(U_{b+a}) = 0$ und die Gleichung zerfällt dann nach (E. §. 95.) genau in die beiden Gleichungen (§. 92. I. n. 1. und n. 2.), während die (I. n. 3.) bereits (zur Bestimmung von λ) gegeben ist (versteht sich, daß man überall $V + \lambda . \psi$ statt V gesetzt denkt), — und in die Grenzgleichung (II.), in welcher nur die mit den von w abhängigen Variationen behafteten Glieder bereits Null gesetzt sind (zur vollendeten Bestimmung von λ). Es finden also für die gegenwärtige Aufgabe genau dieselben Gleichungen (I. 1, 2, 3. und II.) statt wie (§. 92.), nur $V + \lambda . \psi$ überall statt V gesetzt. Man wird deshalb aus (I. 1, 2, 3.) in Verbindung mit $\psi = 0$, die y, z, w und λ, in x bestimmen, mit der gehörigen Zahl willkührlicher Constanten, diese Werthe in die Gleichung (II.) substituiren, und dann die Coefficienten in dieser letztern alle einzeln $= 0$ setzen, und dadurch die Constanten selbst bestimmen.

§. 94. Zusatz 2.

Wäre dieselbe Aufgabe (§. 92.) gegeben, jedoch y, z, w, durch zwei solche Gleichungen wie $\psi = 0$ (§. 92.), nehmlich

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = 0$$

als Funktionen von x von einander abhängig, so würde man vorher z und w eliminiren müssen, und dabei eine der bisher angewandten analoge Methode anwenden.

Man wird nehmlich $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ statt V setzen, $\delta(U_{b \div a})$ genau so erhalten wie (§. 92.), nur überall $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$, wo jetzt V steht, dann λ und λ_1 als solche Funktionen von x sich denken, daß die Gleichungen I. (n. 2. u. n. 3.) statt finden (immer $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ statt V gedacht), die dadurch in λ und λ_1 eingehenden Constanten so annehmen, daß auch die mit

$$\delta z_b, \ (\partial \delta z)_b \text{ etc. etc.}, \ (\delta w)_b, \ (\partial \delta w)_b, \text{ etc. etc.}$$

behafteten Glieder, so viel deren durch die Gleichungen $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$ abhängig sind, aus $\delta(U_{b \div a})$ von selbst wegfallen, und dann wird die Gleichung $\delta(U_{b \div a}) = 0$ noch in die Gleichung (I. n. 1.) und in die Grenzgleichung (II.) zerfallen (überall $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ statt V gesetzt), aus welcher letztern jedoch schon alle mit

$$(\delta z)_b, \ (\partial \delta z)_b, \text{ etc. etc. } (\delta w)_b, \ (\partial \delta w)_b, \text{ etc.},$$

behafteten Glieder weggefallen sind, in so ferne man ihre Coefficienten zur völligen Bestimmung von λ und λ_1 der Null gleich gesetzt hat. — Dies gilt alles noch, wenn auch an den Grenzen d. h. für $x = a$ und $x = b$, selbst noch Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. oder doch $\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, etc. (§. 92.) gegeben, und deshalb $\alpha . \delta\varphi = 0$, $\beta . \delta\varphi_1 = 0$, etc. etc. bereits zu $\delta(U_{b \div a})$ addirt worden sind.

Man hat also genau die Gleichungen (§. 92. I. 1, 2 und 3. und II.), nur $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ überall statt V gesetzt; und man wird aus (I. 1, 2, 3.) in Verbindung mit $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, die Funktionen y, z, w, λ und λ_1, in x nebst den eingehenden willkührlichen Constanten bestimmen, diese Werthe in (II.) substituiren, und dann alle Coefficienten in (II.) einzeln, der Null gleich setzen, um so die Gleichungen zur Bestimmung dieser Constanten zu erhalten.

§. 95. Zusatz 3.

Nach dem bisher Vorgetragenen wäre es völlig unnütz noch mehr für diejenigen Aufgaben hinzuzufügen, welche mit den eben hier behandelten analog sind, und sich nur dadurch von ihnen unterscheiden, daß die Funktion V noch mehr solche Ausdrücke $u, u_1, u_2, \ldots u_q, v, v_1, v_2 \ldots v_r$, u. s. w. f. in sich aufgenommen hat, und dabei entweder alle diese Funktionen y, z, w, u, v, etc. von einander ganz unabhängig, oder noch eine, zwei, drei, vier, etc. Gleichungen

$$\psi = 0, \ \psi_1 = 0, \ \psi_2 = 0, \text{ etc. etc.}$$

zwischen ihnen (ohne oder mit ihren Ableitungen) gegeben sind; da der Weg völlig gebahnt ist, und neue Schwierigkeiten nicht vorkommen können.

Eben so wenig fügen wir für den Fall hinzu, wo U eine der in (B. 17. oder B. §. 23.) behandelten oder irgend eine andere analoge Integral-Funktion seyn sollte, weil der Gang unverändert derselbe bleiben würde, und nur die Gleichungen (I.) noch Integral-Ausdrücke enthalten können, so daß das (§. 83. Anmerkung) angedeutete Verfahren in Anwendung kommen müßte.

§. 96. Zusatz 4.

Wohl aber darf der Umstand berührt werden, daß die Gleichungen $\psi = 0, \ \psi_1 = 0$, etc. in allen den hier wirklich behandelten und eben erwähnten Aufgaben nicht alle gegeben seyn können, sondern dagegen die Bedingung, daß eine oder mehrere dieser Funktionen ψ, ψ_1 etc. unabhängig von x (d. h. für jeden Werth von x) beständig einen und denselben, nicht gegebenen Werth, behalten sollen. — Da dann zwar nicht $\psi = 0, \ \psi_1 = 0$, etc. aber doch noch $\partial\psi = 0, \ \partial\psi_1 = 0$ etc. etc. seyn würde, so hätte man dann zwar nicht $V + \lambda.\psi + \lambda_1.\psi_1 + \ldots = V$,
aber doch, λ und λ_1 als invariabel gedacht,

$$\partial(V + \lambda.\psi + \lambda_1.\psi_1 + \ldots) = \partial V$$

$$\partial^2(V + \lambda.\psi + \lambda_1.\psi_1 + \ldots) = \partial^2 V \quad \text{u. s. w. f.;}$$

und eben dieserhalb würden die Rechnungen ganz unverändert dieselben bleiben, wie wenn $\psi=0$, $\psi_1=0$, etc. gegeben wäre, nur mit dem Unterschiede, daß weil diese letztern Gleichungen nicht noch hinzutreten, einige der Funktionen y, z oder w, u. s. w. ganz unbestimmt bleiben und entweder ganz willkührlich angenommen oder durch andere Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden müssen.

§. 97. Zusatz 5.

Sollen endlich in allen diesen Fällen auch noch die Werthe b und a selbst noch gefunden werden, welche U_{b+a} zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle Nachbar-Werthe von U_{b+a} die durch

$$(U_{b+a})_{(\varkappa)} \quad \text{oder} \quad (U_\varkappa)_{b_\varkappa+a_\varkappa}$$

vorgestellt sind, so bleibt alles unverändert dasselbe, nur mit dem Unterschiede, daß zu der Grenzgleichung (II.) die Glieder

$$V_b \cdot \partial b - V_a \cdot \partial a \quad \text{noch hinzutreten.}$$

Anmerkung. In allen diesen Aufgaben, und namentlich in der Aufgabe der (§. §. 87. 89.), kann man sich auch vorstellen, daß in V das z gar nicht vorkommt und auch keine dessen Ableitungen, während aber ∂y doch nicht willkührlich, sondern von einem gegebenen ∂z noch abhängig ist, entweder dadurch, daß zwischen y und z noch eine Gleichung $\psi=0$ gegeben oder eine Funktion ψ, die y und z (und vielleicht auch noch Ableitungen derselben) enthält, unverändert bleiben soll. Die Aufgabe gehörte dann offenbar noch zu derselben Gattung, nur daß sie in so ferne etwas einfacher wäre, als die mit z und den Ableitungen von z behafteten Ausdrücke in V nicht enthalten, das V selbst also einfacher wäre. Zu diesen Aufgaben gehört aber die nächstfolgende.

§. 98. Aufgabe.

Es ist gegeben

$$V=f(x, y, y_1, y_2 \ldots y_m) \quad \text{und} \quad U=\int V \cdot \partial x,$$

endlich $W=f_1(x, y, y_1, y_2 \ldots y_n)$. — Man soll diejenige Funktion y von x finden, welche U_{b+a} zu einem Maximum oder Minimum machen, unter allen nächst größern und nächst kleinern Werthen $y_\varkappa$, welche wie y selbst, den

um $V_b . \delta b - V_a . \delta a$, welche Vermehrung die allgemeine Gleichung völlig ungeändert läßt und nur die Grenzgleichung trifft.

Alles übrige bleibt ungeändert dasselbe.

§. 92. Aufgabe.

Es ist gegeben

$$V = f(x, y, y_1, y_2, \dots y_m, z, z_1, z_2, \dots z_n, w, w_1, w_2 \dots w_p)$$

und $U = \int V . \partial x$. Man soll y, z und w als Funktionen von x so finden, daß U ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle durch $y_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $w_{\prime\prime}$ vorgestellten, nächst größern und nächst kleinern Werthe von y, z, und w.

Auflösung. Nimmt man

$$U_{\prime\prime} = \int (V_{\prime\prime}) . \partial x$$

und versteht unter $V_{\prime\prime}$ das was aus V wird, wenn y, z, w, in $y_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime}$, $w_{\prime\prime}$ übergehen, so stellt $(U_{\prime\prime})_{b \div a}$ diese Nachbar-Werthe von U vor, in Beziehung auf welche $U_{b \div a}$ selbst ein Maximum oder Minimum werden soll.

Es wird nun nach (B. §. 5. §. 6. und E. §. 67.) oder nach (B. §. 12.):

$$\delta(U_{b \div a}) = \int_{b \div a} \underset{a+b=m}{S} . \left[(-1)^a . \partial^a \left(\frac{\partial V}{\partial y_a} \right) \right] \delta y . \partial x +$$

$$+ \left(\underset{b+c+d=m-1}{S} . \left[(-1)^c . \partial^c \left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}} \right) . \partial^d \delta y \right] \right)_{b \div a}$$

$$+ \int_{b \div a} \underset{a+b=n}{S} . \left[(-1)^a . \partial^a \left(\frac{\partial V}{\partial z_a} \right) \right] \delta z . \partial x +$$

$$+ \left(\underset{b+c+d=n-1}{S} . \left[(-1)^c . \partial^c \left(\frac{\partial V}{\partial z_{c+d+1}} \right) . \partial^d \delta z \right] \right)_{b \div a}$$

$$+ \int_{b \div a} \underset{a+b=p}{S} . \left[(-1)^a . \partial^a \left(\frac{\partial V}{\partial w_a} \right) \right] \delta z . \partial x +$$

$$+ \left(\underset{b+c+d=p-1}{S} . \left[(-1)^c . \partial^c \left(\frac{\partial V}{\partial w_{c+d+1}} \right) . \partial^d \delta w \right] \right)_{b \div a}$$

Setzt man daher nach (§. 6.) $\delta(U_{b+a})=0$, so erhält man nach (E. §. 95.):

$$\text{I. } 1)\ \underset{a+b=m}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial y_a}\right)\right]=0,\quad 2)\ \underset{a+b=n}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial z_a}\right)\right]=0,$$

$$3)\ \underset{a+b=p}{S.}\left[(-1)^a.\partial^a\left(\frac{\partial V}{\partial w_a}\right)\right]=0,$$

welches die allgemeinen Gleichungen des Maximums und Minimums sind; und noch

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{l}\left(\underset{b+c+d=m-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta y\right]\right)_{b+a}\\ +\left(\underset{b+c+d=n-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial z_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta z\right]\right)_{b+a}\\ +\left(\underset{b+c+d=p-1}{S.}\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial V}{\partial w_{c+d+1}}\right).\partial^d\delta w\right]\right)_{b+a}\end{array}\right\}=0,$$

welches die Grenzgleichung ist.

Betrachten wir nun die allgemeinen Gleichungen (I.), so finden wir, daß (n. 1.) nach y von der $2m^{ten}$, nach z von der $m+n^{ten}$ und nach w von der $m+p^{ten}$ Ordnung seyn wird. Eben so ist (n. 2.) nach y, von der $m+n^{ten}$,
nach z, von der $2n^{ten}$,
nach w, von der $n+p^{ten}$ Ordnung.
Endlich ist (n. 3.) ebenfalls eine Differentialgleichung und zwar nach y, von der $m+p^{ten}$,
nach z, von der $n+p^{ten}$
und nach w, von der $2p^{ten}$ Ordnung. Folglich erhält man nach (E. §. 104.) y, z und w in x ausgedrückt mit $2m+2n+2p$ willkührlichen Constanten.

Gerade eben so viele Glieder hat nun die Gleichung (II.). Sind daher nicht noch Gleichungen oder andere Bedingungen gegeben, die an den Grenzen d. h. für $x=a$ und $x=b$ erfüllt werden sollen, so ist jeder einzelne Coefficient von (II.)

der Null gleich, und man hat also dann im Allgemeinen eben so viele Gleichungen als willkührliche Constanten, so daß im Allgemeinen diese Constanten ihre Bestimmung erhalten werden. *)

Sind aber noch Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. etc. gegeben, zwischen y_b, y_a, z_b, z_a, w_b, w_a, $(\partial y)_b$ etc. etc.; oder sollen solche Funktionen φ, φ_1, φ_2, etc. unverändert denselben Werth behalten, für alle nächstangrenzenden Werthe y_x, z_x, w_x, etc., so addirt man zu $\delta(U_{b \div a})$ noch

$$\alpha . \delta\varphi + \beta . \delta\varphi_1 + \gamma . \delta\varphi_2 + \ldots = 0$$

hinzu, wodurch bloß die Grenzgleichung geändert wird (E. §. 95.), und muß aus den $2m + 2n + 2p$ Gleichungen, in welche die Grenzgleichung zerfällt, erst die unbestimmten α, β, γ, etc. etc. eliminiren, so daß die Zahl der zur Bestimmung der $2m + 2n + 2p$ willkührlichen Constanten, hervorgehenden Gleichungen geringer wird, so bald nicht noch die Gleichungen

$\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, etc. etc. hinzutreten, welches jedoch nicht der Fall ist, wenn φ, φ_1, etc. etc. bloß unverändert denselben, nicht gegebenen Werth, behalten sollen. In diesem letztern Falle allein bleiben einige der Constanten, im Allgemeinen, unbestimmt, und können noch anderen vorhandenen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Was endlich die Unterscheidung des Maximi vom Minimo betrifft, für die gefundenen Funktionen y, z, w, welche $\delta(U_{b \div a}) = 0$ machen, so bestimmt man $\delta^2(U_{b \div a})$ und behandelt solches genau nach (§. 85.), und bei einiger Aufmerksamkeit auf den daselbst angewandten Gang wird man finden, daß $U_{b \div a}$ allemal ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ seyn wird, so oft

*) In der „Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung." Berlin 1823 p. 156. findet man die Meinung ausgesprochen, daß y, z, w in x mit $m + n + 4p$ willkührlichen Constanten ausgedrückt werden würden, wo p die größeste der Zahlen m, n, p. — Daher erscheint dort diese Aufgabe als eine unbestimmte, die sie jedoch, wenn man (E. §. §. 102 — 105.) genau überlegt, im Allgemeinen nicht ist.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_m^2}.f^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m \cdot \partial z_n}.fg + \frac{\partial^2 V}{\partial y_n^2}.g^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_m \cdot \partial w_p}.fh +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial z_n \cdot \partial w_p}.gh + \frac{\partial^2 V}{\partial w_p^2}.h^2$$

für jeden reellen Werth von f, g und h, und für jeden Werth von x zwischen a und b, beständig ein und dasselbe Zeichen behält (einige Nullenwerthe mit eingeschlossen) und zwar beständig $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ wird. *) Die übrigen, (§. 85.) gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

§. 93. Zusatz 1.

Ist aber noch eine Gleichung

$$\psi(x, y, z, w, y_1, z_1, w_1, \ldots y_p, z_q, w_r) = 0$$

zwischen $x, y, z, w,$ und ihren Ableitungen gegeben, die für jeden Werth von x (und nicht bloß an den Grenzen d. h. nicht nur für $x = a$ und $x = b$) gelten soll, so wird man z erst aus V eliminiren müssen, und dazu wiederum die Methode des (§. 89.) anwenden. — Man setzt also durchgehends $V + \lambda . \psi$ statt V in dem vorhergehenden (§. 92.), und nimmt für λ diejenige Funktion von x, welche in $\delta(U_{b \div a})$ den mit δw behafteten und unter dem Integralzeichen $\int$ noch stehenden Theil zu Null macht, und denkt sich die Constanten, welche aus dieser Gleichung in die Bestimmung von λ eingehen werden, so genommen, daß auch die mit $(\delta w)_b$, $(\partial \delta w)_b$, $(\partial^2 \delta w)_b$, etc. etc. behafteten Glieder ebenfalls wegfallen, bis auf diejenigen $(\delta w)_a$, $(\partial \delta w)_a$, etc. welche vielleicht deshalb noch unbestimmt bleiben (und bleiben können), weil die Gleichung $\psi = 0$ eine Differentialgleichung ist, also auch $\delta\psi = 0$ in Bezug auf

*) Sowohl das Resultat des (§. 85.) als auch das gegenwärtige scheint noch nirgends ausgesprochen, überhaupt diese Untersuchung weder für den einfachern noch für den zusammengesetztern Fall noch nirgends angestellt worden zu seyn.

δw eine Differentialgleichung seyn wird, von der p^{ten} Ordnung, weshalb z. B. $(\delta w)_a, (\partial\delta w)_a \ldots (\partial^{r-1}\delta w)_a$ eben so unbestimmt bleiben, als die r eingehenden Constanten willkührlich sind, wenn sie nicht und somit auch

$(\delta w)_a, (\partial\delta w)_a$, etc. etc. durch gegebene Gleichungen an den Grenzen, oder auf sonstige Weise ihre besondere Bestimmung erhalten; und dies bleibt unverändert, wenn auch noch solche Gleichungen wie (§. 92.), nehmlich

$\delta\varphi = 0$, $\delta\varphi_1 = 0$, etc. an den Grenzen gegeben, also

$$\alpha . \delta\varphi = 0, \; \beta . \delta\varphi_1 = 0, \text{ etc. etc.}$$

bereits zu $\delta(U_{b \div a})$ addirt seyn sollten.

Ist aber auf diese Weise jede von w abhängige Variation aus $\delta(U_{b \div a})$ eliminirt, so setzt man nach (§. 6.)

$\delta(U_{b \div a}) = 0$ und die Gleichung zerfällt dann nach (E. §. 95.) genau in die beiden Gleichungen (§. 92. I. n. 1. und n. 2.), während die (I. n. 3.) bereits (zur Bestimmung von λ) gegeben ist (versteht sich, daß man überall $V + \lambda . \psi$ statt V gesetzt denkt), — und in die Grenzgleichung (II.), in welcher nur die mit den von w abhängigen Variationen behafteten Glieder bereits Null gesetzt sind (zur vollendeten Bestimmung von λ). Es finden also für die gegenwärtige Aufgabe genau dieselben Gleichungen (I. 1, 2, 3. und II.) statt wie (§. 92.), nur $V + \lambda . \psi$ überall statt V gesetzt. Man wird deshalb aus (I. 1, 2, 3.) in Verbindung mit $\psi = 0$, die y, z, w und λ, in x bestimmen, mit der gehörigen Zahl willkührlicher Constanten, diese Werthe in die Gleichung (II.) substituiren, und dann die Coefficienten in dieser letztern alle einzeln $= 0$ setzen, und dadurch die Constanten selbst bestimmen.

§. 94. Zusatz 2.

Wäre dieselbe Aufgabe (§. 92.) gegeben, jedoch y, z, w, durch zwei solche Gleichungen wie $\psi = 0$ (§. 92.), nehmlich

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = 0$$

als Funktionen von x von einander abhängig, so würde man vorher z und w eliminiren müssen, und dabei eine der bisher angewandten analoge Methode anwenden.

Man wird nehmlich $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ statt V setzen, $\delta(U_{b \div a})$ genau so erhalten wie (§. 92.), nur überall $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$, wo jetzt V steht, dann λ und λ_1 als solche Funktionen von x sich denken, daß die Gleichungen I. (n. 2. u. n. 3.) statt finden (immer $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ statt V gedacht), die dadurch in λ und λ_1 eingehenden Constanten so annehmen, daß auch die mit

$$\delta z_b, \ (\partial \delta z)_b \text{ etc. etc., } (\delta w)_b, \ (\partial \delta w)_b, \text{ etc. etc.}$$

behafteten Glieder, so viel deren durch die Gleichungen $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$ abhängig sind, aus $\delta(U_{b \div a})$ von selbst wegfallen, und dann wird die Gleichung $\delta(U_{b \div a}) = 0$ noch in die Gleichung (I. n. 1.) und in die Grenzgleichung (II.) zerfallen (überall $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ statt V gesetzt), aus welcher letztern jedoch schon alle mit

$$(\delta z)_b, \ (\partial \delta z)_b, \text{ etc. etc. } (\delta w)_b, \ (\partial \delta w)_b, \text{ etc.,}$$

behafteten Glieder weggefallen sind, in so ferne man ihre Coefficienten zur völligen Bestimmung von λ und λ_1 der Null gleich gesetzt hat. — Dies gilt alles noch, wenn auch an den Grenzen d. h. für $x = a$ und $x = b$, selbst noch Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc. oder doch $\delta \varphi = 0$, $\delta \varphi_1 = 0$, etc. (§. 92.) gegeben, und deshalb $\alpha . \delta \varphi = 0$, $\beta . \delta \varphi_1 = 0$, etc. etc. bereits zu $\delta(U_{b \div a})$ addirt worden sind.

Man hat also genau die Gleichungen (§. 92. I. 1, 2 und 3. und II.), nur $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1$ überall statt V gesetzt; und man wird aus (I. 1, 2, 3.) in Verbindung mit $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, die Funktionen y, z, w, λ' und λ_1, in x nebst den eingehenden willkührlichen Constanten bestimmen, diese Werthe in (II.) substituiren, und dann alle Coefficienten in (II.) einzeln, der Null gleich setzen, um so die Gleichungen zur Bestimmung dieser Constanten zu erhalten.

§. 95. Zusatz 3.

Nach dem bisher Vorgetragenen wäre es völlig unnütz noch mehr für diejenigen Aufgaben hinzuzufügen, welche mit den eben hier behandelten analog sind, und sich nur dadurch von ihnen unterscheiden, daß die Funktion V noch mehr solche Ausdrücke $u, u_1, u_2, \ldots u_q, v, v_1, v_2 \ldots v_r$, u. s. w. f. in sich aufgenommen hat, und dabei entweder alle diese Funktionen y, z, w, u, v, etc. von einander ganz unabhängig, oder noch eine, zwei, drei, vier, etc. Gleichungen

$$\psi = 0,\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \text{etc. etc.}$$

zwischen ihnen (ohne oder mit ihren Ableitungen) gegeben sind; da der Weg völlig gebahnt ist, und neue Schwierigkeiten nicht vorkommen können.

Eben so wenig fügen wir für den Fall hinzu, wo U eine der in (B. 17. oder B. §. 23.) behandelten oder irgend eine andere analoge Integral-Funktion seyn sollte, weil der Gang unverändert derselbe bleiben würde, und nur die Gleichungen (I.) noch Integral-Ausdrücke enthalten können, so daß das (§. 83. Anmerkung) angedeutete Verfahren in Anwendung kommen müßte.

§. 96. Zusatz 4.

Wohl aber darf der Umstand berührt werden, daß die Gleichungen $\psi = 0,\ \psi_1 = 0$, etc. in allen den hier wirklich behandelten und eben erwähnten Aufgaben nicht alle gegeben seyn können, sondern dagegen die Bedingung, daß eine oder mehrere dieser Funktionen ψ, ψ_1 etc. unabhängig von x (d. h. für jeden Werth von x) beständig einen und denselben, nicht gegebenen Werth, behalten sollen. — Da dann zwar nicht $\psi = 0,\ \psi_1 = 0$, etc. aber doch noch $\delta\psi = 0,\ \delta\psi_1 = 0$ etc. etc. seyn würde, so hätte man dann zwar nicht $V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1 + \ldots = V$,
aber doch, λ und λ_1 als invariabel gedacht,

$$\delta(V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1 + \ldots) = \delta V$$

$$\delta^2(V + \lambda . \psi + \lambda_1 . \psi_1 + \ldots) = \delta^2 V \quad \text{u. s. w. f.;}$$

und eben dieserhalb würden die Rechnungen ganz unverändert dieselben bleiben, wie wenn $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, etc. gegeben wäre, nur mit dem Unterschiede, daß weil diese letztern Gleichungen nicht noch hinzutreten, einige der Funktionen y, z oder w, u. s. w. ganz unbestimmt bleiben und entweder ganz willkührlich angenommen oder durch andere Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden müssen.

§. 97. Zusatz 5.

Sollen endlich in allen diesen Fällen auch noch die Werthe b und a selbst noch gefunden werden, welche $U_{b \div a}$ zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle Nachbar-Werthe von $U_{b \div a}$ die durch

$$(U_{b \div a})_{(\varkappa)} \quad \text{oder} \quad (U_{\varkappa})_{b_\varkappa \div a_\varkappa}$$

vorgestellt sind, so bleibt alles unverändert dasselbe, nur mit dem Unterschiede, daß zu der Grenzgleichung (II.) die Glieder

$$V_b \cdot \partial b - V_a \cdot \partial a \qquad \text{noch hinzutreten.}$$

Anmerkung. In allen diesen Aufgaben, und namentlich in der Aufgabe der (§. §. 87. 89.), kann man sich auch vorstellen, daß in V das z gar nicht vorkommt und auch keine dessen Ableitungen, während aber ∂y doch nicht willkührlich, sondern von einem gegebenen ∂z noch abhängig ist, entweder dadurch, daß zwischen y und z noch eine Gleichung $\psi = 0$ gegeben oder eine Funktion ψ, die y und z (und vielleicht auch noch Ableitungen derselben) enthält, unverändert bleiben soll. Die Aufgabe gehörte dann offenbar noch zu derselben Gattung, nur daß sie in so ferne etwas einfacher wäre, als die mit z und den Ableitungen von z behafteten Ausdrücke in V nicht enthalten, das V selbst also einfacher wäre. Zu diesen Aufgaben gehört aber die nächstfolgende.

§. 98. Aufgabe.

Es ist gegeben

$$V = f(x, y, y_1, y_2 \ldots y_m) \quad \text{und} \quad U = \int V \cdot \partial x,$$

endlich $W = f_1(x, y, y_1, y_2 \cdots y_n)$. — Man soll diejenige Funktion y von x finden, welche $U_{b \div a}$ zu einem Maximum oder Minimum machen, unter allen nächst größern und nächst kleinern Werthen $y_\varkappa$, welche wie y selbst, den

Werth von $\int_{b+a} W . \partial x$ unverändert denselben lassen, es mag solcher Werth $= N$ und gegeben seyn, oder nicht gegeben seyn. *)

Auflösung. Man hat hier abermals wie im (§. §. 87. 89.) die Nachbar-Werthe von U_{b+a} durch $(U_{b+a})_{\varkappa}$ d. h. $(U_{\varkappa})_{b+a}$, wo $U_{\varkappa} = \int V_{\varkappa} . \partial x$ ist, ausgedrückt, während $V_{\varkappa}$ das bedeutet, was aus V wird, sobald man $y_{\varkappa}$ oder $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \ldots$ statt y schreibt. Uebergeht man $\delta(U_{b+a}) = \infty$, so hat man, im Falle des gesuchten Maximums oder Minimums

$\delta(U_{b+a}) = 0$, d. h. nach (V. §. §. 11. 12.):

$$1) \int_{b+a} S . \left[(-1)^a . \partial^a \frac{\partial V}{\partial y_a}\right] . \delta y . \partial x +$$
$$+ \left(S . \left[(-1)^c . \partial^c \left(\frac{\partial V}{\partial y_{c+\delta+1}}\right) . \partial^\delta \delta y\right]\right)_{b+a} = 0,$$

aber nicht für **jedes** δy, $\delta^2 y$, etc., sondern nur für diejenigen, welche zugleich

$$2) \int_{b+a} W_{\varkappa} . \partial x = \int_{b+a} W . \partial x$$

machen, unter der Voraussetzung, daß $W_{\varkappa}$ das bedeutet, was aus W wird, sobald man $y_{\varkappa}$ statt y schreibt. — Diese Gleichung (2.) führt aber namentlich zu der andern

$$3) \delta . \int_{b+a} W . \partial x = \int_{b+a} (\delta W) . \partial x = 0$$

d. h. nach (V. §. 5. oder V. §. §. 9. 11. 12.) zu

$$4) \int_{b+a} S . \left[(-1)^a . \partial^a \frac{\partial W}{\partial y_a}\right] . \delta y . \partial x +$$
$$+ \left(S . \left[(-1)^c . \partial^c \left(\frac{\partial W}{\partial y_{c+\delta+1}}\right) . \partial^\delta \delta y\right]\right)_{b+a} = 0,$$

so daß die Gleichung (1.) nur für alle diejenigen δy statt zu finden hat, welche zugleicher Zeit der Gleichung (4.) genügen.

---

*) Hieher gehören die Beispiele des V. Kap. der Method. inv. lin. curv. max. min. etc. etc.

Wenn aber δy nicht willkührlich ist (als Funktion von x) in der Gleichung (1.), so sind doch

$(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_a$, etc. $(\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_b$, etc. etc.

offenbar willkührlich und von einander unabhängig, wenn nicht noch Gleichungen. $\varphi=0$, $\varphi_1=0$ etc. etc. zwischen ihnen gegeben sind, welche jedoch vorher schon gehörig in Rechnung gebracht seyn können, so daß die übrigbleibenden $(\delta y)_a$, $(\delta y)_b$, etc. etc. als von einander ganz unabhängig angesehen werden dürfen. Man könnte daher den Gleichungen (1.) und (4.) dadurch zugleich Genüge zu leisten suchen, daß man die (4.) mit einem constanten λ multiplicirt (wo λ unter das $\int$ Zeichen gesetzt werden kann, und auch unter alle Differentialzeichen) und zu (1.) addirt, und dann den unter dem Integralzeichen befindlichen Theil

$$S.\left[(-1)^a.\partial^a\frac{\partial V}{\partial y_a}\right]+S.\left[(-1)^a.\partial^a\frac{\partial(\lambda.W)}{\partial y_a}\right]$$

oder

$$S.\left[(-1)^a.\partial^a\frac{\partial(V+\lambda.W)}{\partial y_a}\right]$$

der Null gleich setzt (wodurch y in x mit der unbestimmten Constante λ und den übrigen durch Integration eingehenden willkührlichen Constanten bestimmt ist), und zuletzt noch die Coefficienten der unabhängig gebliebenen und noch vorkommenden $(\delta y)_a$, $(\delta y)_b$, $(\partial\delta y)_a$ etc. etc. etc. einzeln $=0$ macht (wodurch die willkührlichen Constanten bestimmt werden, während λ durch die Bedingung, daß

$\int_{b+a} W.\partial x=N$ werden soll oder durch eine andere diese ersetzende, bestimmt ist.).

Obgleich man aber übersehen kann, daß auf diesem Wege der Bedingung $\delta(U_{b+a})=0$ und der andern $\delta\int_{b+a} W.\partial x=0$, zugleich genügt ist, so sieht man doch nicht ein, daß dies der einzig mögliche Weg sey, auf welchem solches geschehen konnte; und man wird daher besser thun, nach Lagrange diesen Fall auf die Aufgabe der (§. §. 87. 89.) zurückzuführen. — Bezeichnet man nehmlich

das allgemeine Integral $\int W.\partial x$, durch z, so daß $W=\partial z$ ist, so ist diese Gleichung, oder

5) $W-\partial z=0$

hier diejenige, welche statt der dortigen (§. 89.) $\psi=0$ gesetzt werden muß, während das δy in δV nicht beliebig sondern von dem δz abhängig ist.

Wendet man nun die dortige Auflösung hier an, so hat man

6) $V=V+\lambda.(W-\partial z)$,

wo λ noch unbestimmt entweder eine Funktion von x oder vielleicht auch constant ist. — Dann wird aber

$$7)\ \delta U=\int\delta(V+\lambda.(W-\partial z)).\partial x$$
$$=\int\delta(V+\lambda.W).\partial x-\int\delta(\lambda.\partial z).\partial x.$$

Nun ist aber, theilweise integrirend:

$$8)\ \int_{b\div a}\delta(V+\lambda.W).\partial x=$$
$$\int_{b\div a}S.\left[(-1)^a.\partial^a\frac{\partial(V+\lambda.W)}{\partial y_a}\right]\delta y.\partial x+$$
$$+\left(S.\left[(-1)^a.\partial^c\left(\frac{\partial(V+\lambda.W)}{\partial y_{c+\delta+1}}\right).\partial^\delta\delta y\right]\right)_{b\div a};$$

und wegen $\delta(\lambda.\partial z)=\lambda.\partial\delta z=\partial(\lambda.\delta z)-\partial\lambda.\delta z$,

$$9)\ \int_{b\div a}\delta(\lambda.\partial z)=(\lambda.\delta z)_{b\div a}-\int_{b\div a}(\partial\lambda).\delta z.$$

Folglich aus (7.):

$$10)\ \delta(U_{b\div a})=\int_{b\div a}\left(S.\left[(-1)^a.\partial^a\frac{\partial(V+\lambda.W)}{\partial y_a}\right].\delta y+\partial\lambda.\delta z\right).\partial x$$
$$+\left(S.\left[(-1)^c.\partial^c\left(\frac{\partial(V+\lambda.W)}{\partial y_{c+\delta+1}}\right).\partial^\delta\delta y\right]\right)_{b\div a}+(\lambda.\delta z)_{b\div a}.$$

Bestimmt man nun λ so, daß der mit δz unter dem Integralzeichen behaftete Theil von selbst wegfällt, so hat man

11) $\partial\lambda=0$, also λ constant (nach x); und die Gleichung $\delta(U_{b\div a})=0$ giebt dann

$$\text{I. } S.\left[(-1)^a.\partial^a\frac{\partial(V+\lambda.W)}{\partial y_a}\right]=0,$$

wo λ constant und noch unbestimmt ist, und welche Gleichung

die allgemeine ist, für das Maximum oder Minimum, — so wie

$$\text{II. } S.\left[(-1)^c.\partial^c\frac{\partial(V+\lambda.W)}{\partial y_{c+\delta+1}}.\partial^\delta\delta y\right]=0,$$

in so ferne $(\lambda.\delta z)_{b+a}=\lambda.(\delta z_b-\delta z_a)$ deshalb verschwindet, weil nach der Bedingung der Aufgabe

$(\delta z)_{b+a}=\delta.\int_{b+a}W.\partial x=0$ seyn soll.

Die Gleichung (I.) giebt nun integrirt, y in x und dem constanten λ und den willkührlichen Constanten, welche bei der Integration eingehen; und die Gleichung (II.) zerfällt (alles genau nach (§. 89.)) in diejenigen Gleichungen, welche in Verbindung mit $\int_{b+a}W.\partial x=N$, wenn N gegeben ist, oder in Verbindung mit einer andern dafür gegebenen Bedingung der Aufgabe zur Bestimmung der willkührlichen Constanten, und der Constante λ gebraucht werden müssen.

Beispiel. Die Curve zu suchen, welche zwischen gegebenen Abscissen den größten oder kleinsten Inhalt hat, unter allen denen die zwischen denselben Grenzen einerlei Länge haben.

Anmerkung 1. Um das Wesen dieser Aufgabe noch deutlicher erkennen zu lassen, bemerken wir noch, daß die Bedingung

$\int_{b+a}W.\partial x=N$ eigentlich statt der Gleichung $\Phi=0$ in (§. 52. I.) genommen, und dann die Aufgabe ganz nach (§. 52. I.) behandelt werden könnte, wenn die Gleichung

$\delta\Phi=0$, welche hier $\int_{b+a}\delta W.\partial x=0$ wird, hier wie dort, einen der Ausdrücke

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial\delta y)_b$, etc. etc. etc. $(\partial^n\delta y)_b$, $(\partial^n\delta y)_a$ durch die übrigen ausgedrückt lieferte, in so ferne dann die Schlüsse (E. §. 94.) noch mit unveränderter Kraft statt finden würden. Allein die Gleichung $\int_{b+a}\delta W.\partial x=0$ giebt

$$\int_{b+a}\left(\frac{\partial W}{\partial y}.\delta y+\frac{\partial W}{\partial y_1}.\partial\delta y+\ldots+\frac{\partial W}{\partial y_n}.\partial^n\delta y\right).\partial x=0$$

aus welcher, wenn man sie umformt, die Gleichung (4.) des (§. 98.) wird, und welche, wie man sieht, keinen der oben genannten Ausdrücke durch die übrigen entwickelt darstellen läßt. Und deshalb kann also diese Aufgabe nicht nach (§. 52. I.) gelößt werden, wie dies Anfängern in diesem Kalkul wohl möglich zu seyn scheinen dürfte.

Anmerkung 2. Man scheint auch so schließen zu können: Weil

$\int_{b+a} W . \partial x = N$ werden soll und N ein bestimmter constanter Werth ist, so ist auch, im Falle λ constant gedacht wird, $\lambda . N$ oder

$\lambda . \int_{b+a} W . \partial x$ oder $\int_{b+a} (\lambda . W) . \partial x$ ein solcher bestimmter und constanter Werth, und daher offenbar

$\int_{b+a} V . \partial x$ d. h. U_{b+a} allemal ein $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$, so oft

$\int_{b+a} V . \partial x + \int_{b+a} (\lambda . W) . \partial x$ d. h. $\int_{b+a} (V + \lambda . W) . \partial x$

ein solches ist (§. 14.). Es käme also alles darauf an, die Bedingungen zu suchen, unter welchen dieses Integral

$$(U_\lambda)_{b+a} = \int_{b+a} (V + \lambda . W) . \partial x$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Um diese zu finden, müßte man $\delta (U_\lambda)_{b+a} = 0$ setzen und hätte dann, nach (V. §. §. 9. 11. 12.):

$$\int_{b+a} S \left[(-1)^a . \partial^a . \frac{\partial (V + \lambda . W)}{\partial y_a} \right] . \delta y . \partial x +$$

$$+ \left(S . \left[(-1)^c . \partial^c \left(\frac{\partial (V + \lambda . W)}{\partial y_{c+d+1}} \right) . \partial^d \delta y \right] \right)_{b+a} = 0.$$

Ob aber diese Gleichung dergestalt zerfallen werde, daß sowohl der unter dem Integralzeichen stehende Theil, als auch der andere, jeder für sich $= 0$ gesetzt werden könne, fällt hier nicht in die Augen, da δy offenbar noch immer nicht willkührlich ist, sondern noch immer der Gleichung (4.) des (§. 98.) genügen muß. Daß diese obige Gleichung identisch werde, wenn man jeden Theil für sich $= 0$ setzt, fällt zwar in die Augen, aber man sieht doch nicht, 1) ob diese Zerfällung die einzig mögliche ist, und besonders 2) ob diese Zerfällung statt finden werde, für jedes δy, welches der Gleichung (4. des §. 98.) genügt, wovon man doch nothwendig überzeugt seyn muß, wenn man von der Existenz des Maximums oder Minimums, nachdem die übrigen Untersuchungen angestellt sind, überzeugt seyn will.

So einfach daher diese Ansicht anfänglich zu seyn scheint, so wenig ist sie doch strenge, und eigentlich unbedingt unzulässig, sobald man nicht bloß Resultate auf empirischen Wege finden, sondern dergleichen mit Selbstbewußtseyn und mit Nothwendigkeit ableiten will.

§. 99. Zusatz 1.

Aus unserer Untersuchung (§. 98.) geht also für diese Aufgabe diese praktische Regel hervor:

Man multiplicire W mit einer unbestimmten Constante λ, addire zu V, und setze dann

$\delta . \int_{b+a}(V + \lambda . W) . \partial x$ oder $\int_{b+a}\delta(V + \lambda . W) . \partial x = 0$ und behandle diese Gleichung so, wie wenn δy ganz beliebig wäre, indem man jedoch die zwischen

$(\delta y)_a$, $(\delta y)_b$, $(\partial \delta y)_a$ etc. etc. etc. vielleicht noch gegebenen Gleichungen $\delta \varphi = 0$, $\delta \varphi_1 = 0$ etc. etc. gehörig in Rechnung bringt, wie solches (§. 89.) geschehen und ein für allemal gezeigt ist. Zuletzt wird λ aus der Bedingung $\int_{b+a} W . \partial x = N$ oder aus einer andern sie ersetzenden, bestimmt.

§. 100. Zusatz 2.

Soll $U_{b+a} = \int_{b+a} V . \partial x$ ein Maximum oder Minimum werden, in Bezug auf alle diejenigen nächst größern und nächst kleinern Werthe von y, welche durch y_x oder

$y + \varkappa . \delta y + \text{etc.}$ vorgestellt seyn mögen, und für welche mehre andere zwischen denselben Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integrale bestimmte und unveränderliche Werthe erhalten sollen, z. B.

$\int_{b+a} W . \partial x = N$, $\int_{b+a} W_1 . \partial x = N_1$, $\int_{b+a} W_2 . \partial x = N_2$, etc.

wo W_1, W_2, etc. eben solche Funktionen seyn sollen, wie W selbst, jedoch in Bezug auf die Ableitungen von y nach x, von jedem beliebigen Grade, so würde die Aufgabe in die Klasse der (§. 93.) behandelten gehören; und die dortige Behandlung gerade so wie im (§. 98.) für den einfachern Fall geschehen, hier angewandt, würde zu der praktischen Regel führen, nach welcher das Maximum oder Minimum von

$$\int_{b+a}(V + \lambda . W + \lambda_1 . W_1 + \lambda_2 . W_2 + \text{etc. etc.}) . \partial x$$

gesucht wird, unter der Voraussetzung daß δy ganz willkührlich ist, daß aber dann vielleicht noch zwischen

$(\delta y)_b$, $(\delta y)_a$, $(\partial \delta y)_b$ etc. etc. gegebenen Gleichungen $\delta \varphi = 0$, $\delta \varphi_1 = 0$, etc. genügt werde, ganz nach (§. 99.) verfahrend. Die so für y in x und λ, λ_1, λ_2, etc. gefundenen Werthe geben dann, nachdem die Constanten λ, λ_1, λ_2, etc. durch die Gleichungen

$\int_{b+a} W.\partial x = N$, $\int_{b+a} W_1.\partial x = N_1$, $\int_{b+a} W_2.\partial x = N_2$, etc. oder durch andere diese ersetzende Bedingungen bestimmt worden sind, die Funktion y für die hiesige Aufgabe.

Anmerkung. Solche Aufgaben wie die (§. §. 98 — 100.) gelösten, nennt man wohl auch „Aufgaben des relativen Maximums oder „Minimums" während die früher behandelten „die des absoluten Maximums oder Minimums" genannt werden.

Uebrigens gehören hieher die meisten Beispiele des VI. Kap. der Methodus etc. etc, von Euler.

§. 101. Aufgabe.

Es ist $$V = f(x, x_1, y, y_1^0, y_0^1)$$ wo y als eine Funktion von x und x_1 gedacht ist, und wo y_1^0, y_0^1, beziehlich mit $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ gleichbedeutend angenommen sind. Ferner sey

$$U = \int_{b+a} (\int_{x''+x'} V . \partial x_1) \partial x;$$

und nun die Funktion y von x und x_1 so zu bestimmen, daß U ein Maximum oder Minimum werde, in Bezug auf alle dem y nächstangrenzenden und durch $y_\varkappa$ oder $y + \varkappa . \delta y + \text{etc.}$ vorgestellten Funktionen von x und x_1.

Auflösung. Bezeichnet man durch $V_\varkappa$ und $U_\varkappa$ was aus V und U wird, in so ferne $y_\varkappa$ statt y geschrieben seyn mag, so hat man

$$1)\quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y_1^0} . \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y_0^1} . \frac{\partial \delta y}{\partial x_1},$$

$$2)\quad \delta U = \int_{b+a} (\int_{x''+x'} (\delta V) \partial x_1) . \partial x.$$

Setzt man nun, der Kürze wegen

$$\frac{\partial V}{\partial y} = L, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1^0} = L_1^0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0^1} = L_0^1,$$

so wird sich zum Behufe der theilweisen Integration

$$3)\quad \frac{\partial V}{\partial y_0^1} . \frac{\partial \delta y}{\partial x_1} = L_0^1 . \frac{\partial \delta y}{\partial x_1} = \frac{\partial . (L_0^1 . \delta y)}{\partial x_1} - \frac{\partial . L_0^1}{\partial x_1} . \delta y$$

$$4)\quad \frac{\partial V}{\partial y_1^0} . \frac{\partial \delta y}{\partial x} = L_1^0 . \frac{\partial \delta y}{\partial x} = \frac{\partial . (L_1^0 . \delta y)}{\partial x} - \frac{\partial . L_1^0}{\partial x} . \delta y$$

schreiben lassen (nach E. §. 60.) wenn man sich nur L_1^0 und L_0^1 bereits als bloß unmittelbare Funktionen von x und x_1 hergestellt denkt, so daß die in (3. und 4.) angezeigten Differentiationen sich auf alles x_1 oder auf alles x beziehen, was explicit und in y, y_1^0, y_0^1 auch implicit vorkommen mag; und man erhält dann

$$5)\ \int_{x''+x'}(\delta V).\partial x_1 = \int_{x''+x'}\left(L - \frac{\partial L_1^0}{\partial x} - \frac{\partial L_0^1}{\partial x_1}\right).\delta y.\partial x_1$$
$$+ (L_0^1.\delta y)_{x''+x'} + \int_{x''+x'}\frac{\partial(L_1^0.\delta y)}{\partial x}.\partial x_1$$

und wenn dieses nun nochmals nach x integrirt wird, zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$, und dabei x'' und x' als nach x constant angesehen werden, so ergiebt sich

$$6)\ \delta U = \int_{b+a}\int_{x''+x'}\left(L - \frac{\partial L_1^0}{\partial x} - \frac{\partial L_0^1}{\partial x_1}\right).\partial x_1.\partial x$$
$$+ \int_{b+a}(L_0^1.\delta y)_{x''+x'}\partial x + \int_{x''+x'}(L_1^0.\delta y)_{b+a}\partial x_1.$$

Setzt man nun nach (§. 6.) für das Maximum oder Minimum, $\delta U = 0$, so zerfällt die Gleichung nach (E. §. 98.) in

$$\text{I.}\ L - \frac{\partial.L_1^0}{\partial x} - \frac{\partial.L_0^1}{\partial x_1} = 0,$$

welches die allgemeine Gleichung für das Maximum oder Minimum ist, und in

$$\text{II.}\ \int_{b+a}(L_0^1.\delta y)_{x''+x'}\partial x + \int_{x''+x'}(L_1^0.\delta y)_{b+a}\partial x_1 = 0,$$

welche die Grenzgleichung genannt wird.

Die Gleichung (I.) ist eine Differentialgleichung dreier Veränderlichen, im allgemeinen von der 2ten Ordnung; und giebt daher integrirt, y in x und x_1 entweder mit 5 willkührlichen Constanten oder mit willkührlichen Funktionen von x und x_1. —

Die Grenzgleichung (II.) zerfällt, wenn keine weitere Bedingungen gegeben sind, nach (E. §. 98.) in

7) $(L_0^1)_{x''}=0$, 8) $(L_0^1)_{x'}=0$,
9) $(L_1^0)_b=0$, 10) $(L_1^0)_a=0$,

wo b und a Werthe von x, und wo x'', x' Werthe von x_1 sind; und diese Gleichungen werden zur Bestimmung des in (I.) nach der Integration willkührlich gebliebenen dienen.

§. 102. Zusatz.

Sind dagegen in der Aufgabe des vorhergehenden (§. 101.) x'' so wie x' noch Funktionen von x, so wird zwar alles bis zur Gleichung (5.) inclusive, genau dasselbe bleiben; dagegen wird dann nach (E. §. 80. II.):

$$\left(\int\frac{\partial.(L_1^0.\delta y)}{\partial x}.\partial x_1\right)_{x''}=\frac{\partial.(\int(L_1^0.\delta y).\partial x_1)_{x''}}{\partial x}-(L_1^0.\delta y)_{x''}.\frac{\partial x''}{\partial x}$$

und

$$\left(\int\frac{\partial.(L_1^0.\delta y)}{\partial x}.\partial x_1\right)_{x'}=\frac{\partial.(\int(L_1^0.\delta y).\partial x_1)_{x'}}{\partial x}-(L_1^0.\delta y)_{x'}.\frac{\partial x'}{\partial x};$$

folglich subtrahirend:

$$\int_{x''\div x'}\frac{\partial.(L_1^0.\delta y)}{\partial x}.\partial x_1=\frac{\partial.(\int_{x''\div x'}(L_1^0.\delta y).\partial x_1)}{\partial x}$$
$$-\left[(L_1^0.\delta y)_{x''}.\frac{\partial x''}{\partial x}+(L_1^0)_{x'}.\frac{\partial x'}{\partial x}\right].$$

Substituirt man aber dieses in die Gleichung (5.), und integrirt nun noch nach x, zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$, so erhält man:

$$\delta U=\int_{b\div a}\int_{x''\div x'}\left(L-\frac{\partial.L_1^0}{\partial x}-\frac{\partial.L_0^1}{\partial x_1}\right).\partial x_1.\partial x+$$
$$+\int_{b\div a}(L_0^1.\delta y)_{x''\div x'}.\partial x+(\int_{x''\div x'}(L_1^0.\delta y).\partial x_1)_{b\div a}$$
$$-\int_{b\div a}\left((L_1^0.\delta y)_{x''}.\frac{\partial x''}{\partial x}+(L_1^0.\delta y)_{x'}.\frac{\partial x'}{\partial x}\right).\partial x;$$

und dieses $\delta U=0$ gesetzt, giebt dann zwar noch dieselbe allgemeine Gleichung (I.) dagegen eine von der vorigen etwas verschiedene Grenzgleichung (II.), welche dann nach (E. §. 100.) in ihre einzelnen zerfällt wird.

Beispiel. Den Körper zu finden, welcher zwischen gegebenen Grenzen die kleinste oder größte Oberfläche hat.

§. 103. Aufgabe.

Es ist allgemeiner

$$V = f(x, x_1, y, y_1^0, y_0^1 \ldots y_m^0, y_{m-1}^1, y_{m-2}^2 \ldots y_1^{m-1}, y_0^m)$$

wo für jede Zahl p und q, y_p^q gleichbedeutend seyn soll mit $\frac{\partial^{p+q} y}{\partial x^p . \partial x_1^q}$. Ferner sey

$$U = \int_{b+a} (\int_{x''+x'} V . \partial x_1) . \partial x.$$

Man soll die Funktion y von x und x_1 finden, für welche U ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle nächstangrenzende durch $y_{\varkappa}$ oder $y + \varkappa . \delta y +$ etc. etc. vorgestellte Werthe von y.

Auflösung. Die Nachbar-Werthe von U sind ausgedrückt durch

$$U_{\varkappa} = \int_{b+a} (\int_{x''+x'} V_{\varkappa} . \partial x_1) . \partial x,$$

wenn $V_{\varkappa}$ das bedeutet, was aus V wird, sobald man $y_{\varkappa}$ statt y schreibt. — Werden aber die Coefficienten von $V_{\varkappa}$ und $U_{\varkappa}$ durch δ angedeutet, so hat man nach (B. §. 24.):

$$1) \quad \delta V = S.\left[\frac{\partial V}{\partial y_a^b} . \frac{\partial^{a+b} \delta y}{\partial x^a . \partial x_1^b}\right]_{a+b=m} = S.\left[L_a^b . \frac{\partial^{a+b} \delta y}{\partial x^a . \partial x_1^b}\right]_{a+b=m}$$

wenn L_a^b gleichbedeutend ist mit $\frac{\partial V}{\partial y_a^b}$, dabei aber doch (des folgenden wegen) L_a^b **bereits als unmittelbare** Funktion von x und x_1 angesehen wird, so daß für y und alle dessen Ableitungen nach x und x_1 die (uns zur Zeit noch unbekannten) Funktionen von x und x_1, welche sie vorstellen, bereits wirklich substituirt gedacht werden. — Ferner folgt aus (B. §. 6.):

$$2) \quad \delta U = \int_{b+a} (\int_{x''+x'} \delta V . \partial x_1) . \partial x.$$

Und weil δV (in 1.) genau der Ausdruck ist, welcher (C. §. 80.) durch L bezeichnet wurde, so ist das δU hier genau der Ausdruck, welcher (C. §. 80.) durch W bezeichnet worden ist, und man findet also für δU entweder die Umformung (I. des C. §. 80.) oder die Umformung (II. daselbst), je nachdem

x'' und x' nach x constant, oder selbst noch als Funktionen von x gedacht sind.

Setzt man nachher, dem (§. 6.) zu Folge, für das gesuchte Maximum oder Minimum

$\delta U = 0,$ so zerfällt diese Gleichung nach (E. §. 98.), wenn x'' und x' nach x constant sind, nach (E. §. 100.) dagegen, wenn x'' und x' noch Funktionen von x seyn sollten, jedesmal in dieselbe allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums

$$\text{I. } \psi_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \underset{a+b+c=m}{S.}\left[(-1)^{a+b} \cdot \frac{\partial^{a+b}(L_a^b)}{\partial x^a \cdot \partial x_1^b}\right] = 0$$

und in die Grenzgleichung

$$\text{II. (A.)} \ldots 0 = \begin{cases} \left(\underset{c+d+e+f+g=m-2}{S.}\left[(-1)^{c+e} \cdot \frac{\partial^{c+e}(L_{c+d+1}^{e+f+1})}{\partial x^c \cdot \partial x_1^e} \cdot \frac{\partial^{d+f}\delta y}{\partial x^d \cdot \partial x_1^f}\right]\right)_{x''\div x',\, b\div a} + \\ + \int_{x''\div x'}\left(\underset{b+c+d+g=m-1}{S.}\left[(-1)^{b+c} \cdot \frac{\partial^{b+c}(L_{c+d+1}^{b})}{\partial x_1^b \cdot \partial x^c} \cdot \frac{\partial^d \delta y}{\partial x^d}\right]\right)_{b\div a} \cdot \partial x_1 \\ + \int_{b\div a}\left(\underset{a+c+d+g=n-1}{S.}\left[(-1)^{a+c} \cdot \frac{\partial^{a+c}(L_a^{c+d+1})}{\partial x^a \cdot \partial x_1^c} \cdot \frac{\partial^d \delta y}{\partial x_1^d}\right]\right)_{x''\div x'} \cdot \partial x \end{cases}$$

wenn x'' und x' nach x constant sind; oder in die Grenzgleichung

$$\text{II. (B.)} \ldots (\psi_{x''\div x'})_{b\div a} + \left(\int_{x''\div x'} \psi_1 \cdot \partial x_1\right)_{b\div a} + \int_{b\div a} (\psi_2)_{x''\div x'} \cdot \partial x$$
$$- \int_{b\div a}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \psi_1\right)_{x''} \cdot \frac{\partial x''}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \psi_1\right)_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}\right] \cdot \partial x = 0,$$

(wo ψ, ψ_1 und ψ_2 die Bedeutung der (Anmerk. 2. §. 80.) haben), wenn x'' und x' noch Funktionen von x sind.

Die allgemeine Gleichung (I.) ist eine Differentialgleichung zwischen 3 Veränderlichen im Allgemeinen von der $2m$ Ordnung, welche bei der Integration $2m^2 + 3m$ willkührliche Constanten einführt, oder statt der letzteren eine Anzahl willkührlicher Funktionen; und jedesmal werden dann die

Grenzgleichungen (II. A.) oder (II. B.) in so ferne sie nach (E. §. §. 98. 99. 100.) gehörig zerfällt werden, zur Bestimmung dieser willkührlichen Constanten oder dieser willkührlichen Funktionen dienen.

Anmerkung 1. Da der Ausführung dieser Aufgabe für besondere Fälle bei weitem mehr noch, als dies bei den vorhergehenden einfachern Aufgaben der Fall ist, der Umstand im Wege steht, daß die entstehenden Differential-Gleichungen, entweder aus Mangel an Methoden, oder weil in der That Integrals in endlicher Form nicht existiren, nicht integrirt werden können, so wollen wir diese Aufgaben nicht noch im näheren Detail verfolgen; sondern wir versparen solches für einzelne Aufgaben, die in einer Beispielsammlung mehr an ihrem Orte behandelt werden dürften. — Für den Augenblick begnügen wir uns mit einigen Bemerkungen, die hier noch stehen mögen.

Soll nehmlich nicht in Bezug auf alle y_x das Maximum oder Minimum Statt haben, sondern nur in Bezug auf diejenigen, welche an den Grenzen noch gegebenen Bedingungen genügen, so können diese Bedingungen von dreierlei Art seyn; 1) solche, welche sich auf die Grenzwerthe von x_1 beziehen, d. h. auf Funktionen, welche y und dessen Ableitungen enthalten, aber nicht für jeden Werth von x und x_1, sondern zwar für jeden Werth von x, aber nur für $x_1 = x''$ oder $x_1 = x'$ genommen; 2) solche die sich nur auf die Grenzwerthe b und a von x beziehen; z. B. Gleichungen

$\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, etc., welche für jeden Werth von x_1 aber nur für $x = b$ oder $x = a$ statt finden sollen; endlich 3) solche welche sich sowohl auf die Grenzwerthe von x, als auch auf die Grenzwerthe von x_1 beziehen, wie dergleichen in (E. §. 99.) allein berührt worden sind. — Jede dieser 3 verschiedenen Grenzbedingungen wird sich auf einen der 3 vorzüglich bemerkbaren Theile der Grenzgleichung (II. A.) oder auch (II. B.) beziehen und daselbst eine Elimination erfordern und auch möglich machen, so daß dann erst nach geschehener Elimination das Zerfällen nach (E. §. 98. oder E. §. 100.) von Statten gehen kann, wie (E. §. 99.) für die 3te Art der Grenzbedingungen angedeutet ist.

Ob dann für die so gefundene Funktion y von x und x_1, welche $\delta U = 0$ macht, U wirklich ein Maximum sey oder ein Minimum, und welches von beiden, müßte ferner durch

$$\delta^2 U = \int_{b \div a} \left(\int_{x'' \div x'} \delta^2 V \cdot \partial x_1 \right) \cdot \partial x$$

entschieden werden, wozu aber ein eigener Lehrsatz der Integralrechnung nöthig ist, auf den wir bei einer andern Gelegenheit zurückkommen, in so ferne

wir hier den Raum mit bloßen Spekulationen nicht zu sehr anfüllen wollen, und der Weg durch das Vorhergehende hinlänglich gebahnt seyn dürfte.

Man mag übrigens noch bemerken, daß wir hier absichtlich, was sonst nicht geschehen zu seyn scheint, auch den Fall betrachtet haben, wo x'' und x' noch Funktionen von x sind, weil solcher in den Anwendungen am häufigsten vorkommt. Daß die allgemeine Gleichung für das Maximum und Minimum dieselbe bleibt, man mag x'' und x' nach x constant annehmen, oder selbst noch als Funktionen von x, ist eine Eigenschaft des Maximums und Minimums, welche besondere Aufmerksamkeit zu verdienen scheint.

Anmerkung 2. Es ist leicht einzusehen, daß auch in den Aufgaben (§. §. 101—103.) noch die Bedingung gemacht werden kann, daß das Maximum oder Minimum nur unter denjenigen nächst größern und nächst kleinern Funktionen $y_{\prime\prime}$ gesucht werden soll, für welche andere gegebene einfache oder doppelte Integrale beständig denselben Werth behalten zwischen denselben Grenzen. Dies führt zu sehr mannigfaltigen besonderen Aufgaben, welche ebenfalls, da der Weg dazu in den (§. §. 80—99.) gebahnt ist, hier nicht mehr aufgestellt, sondern in einer Beispielsammlung gelegentlich näher verfolgt werden sollen.

Eben so sollen noch zusammengesetztere Aufgaben, wo mehr als 2 absolut Veränderliche x, x_1 etc., oder mehr relativ Veränderliche y, etc. etc. in Betrachtung kommen, hier nicht weiter aufgezählt werden, weil das bisher Entwickelte, in Verbindung mit der Einleitung und der Variationsrechnung, hinlänglich auf den Weg zu führen scheint.

§. 104. Zusatz.

Werden in der Aufgabe (§. 103.) auch noch die Werthe von x'', x' und b und a gesucht, welche das Maximum oder Minimum liefern in Bezug auf andere Grenzen $x''_{\prime\prime}$, $x'_{\prime\prime}$, $b_{\prime\prime}$, $a_{\prime\prime}$, so tritt zu δU nach (V. §. 34. n. 13.) noch hinzu

$$(\int V_{x''} \delta x'' . \partial x)_{b \div a} - (\int V_{x'} . \delta x' . \partial x)_{b \div a} + ((\int V . \partial x_1)_{x'' \div x'})_b . \delta b$$
$$- ((\int V . \partial x)_{x'' \div x'})_a . \delta a,$$

welches sich nach (n. 14.) in

$$\delta x'' . (\int V_{x''} . \partial x)_{b \div a} - \delta x' (\int V_{x'} . \partial x)_{b \div a} + \delta b (\int V_b . \partial x_1)_{x'' \div x'}$$
$$- \delta a (\int V_a . \partial x_1)_{x'' \div x'}$$

verwandelt, wenn x'' und x' nach x constant seyn sollten. Diese nun zu δU hinzutretenden Glieder ändern aber die allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums

nicht, sondern treten bloß zur Grenzgleichung noch hinzu, wie dies schon früher öfter in einem analogen Falle bemerklich gemacht worden ist.

Das nähere Detail bleibt dann genau so, wie solches im (§. §. 73. 74.) für einen einfachern Fall bereits entwickelt zu finden ist.

Bemerkung.

Wir haben bisher bloß entwickelt gegebene Integral-Funktionen betrachtet. Gehen wir daher zu dem andern Fall über, wo eine Integral-Funktion U durch eine Differential-gleichung in $x, y, y_1, y_2 \ldots y_m, z, z_1, z_2, \ldots z_n,$ etc. verwickelt gegeben ist.

§. 105. Aufgabe.

Es ist gegeben U durch die Gleichung

$$\varphi(x, y, y_1 \ldots y_m, z, z_1 \ldots z_n, \text{etc. etc. } U, U_1, \ldots U_p) = 0$$

welche, wenn die für $y, \ldots y_m, z, \ldots z_n$ *) zu setzenden Funktionen von x bekannt wären, durch Integration U mit p willkührlichen Constanten liefern würde, während diese p Constanten etwa dadurch bestimmt seyn mögen, daß

$$U_a, (U_1)_a, (U_2)_a \ldots (U_{p-1})_a$$

bestimmte und gegebene constante Werthe haben sollen, unter a ein Werth von x und die Bezeichnung (E. §. 34.) verstanden. Man soll nun für y, z, etc. diejenigen Funktionen von x suchen, welche U_b (wo b ein Werth von x seyn soll) zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf die durch $y_{,,}$, $z_{,,}$ etc. vorgestellten nächst größern und nächst kleinern Werthe von y.

---

*) Die Zeichen

$$y_1, y_2, \ldots y_m, z_1, z_2, \ldots z_n, U_1, U_2, \ldots U_p$$

stellen, wie bisher oft, die Ableitungen vor von y, z, U, als Funktionen von x betrachtet, nach x genommen.

Auflösung. Stellt $U_{x} = U + x . \delta U + \frac{x^2}{2!} . \delta^2 U + \ldots$ dasjenige vor, was aus U wird, im Falle man y_{x}, z_{x} etc. d. h. $y + x . \delta y + \frac{x^2}{2!} . \delta^2 y + \ldots$, $z + x . \delta z + \frac{x^2}{2!} . \delta^2 z + \ldots$ statt y, z, etc. etc. setzt, so läßt sich $(\delta U)_b$ nach (B. §. 39.) auf die Form

$$\begin{aligned} &\int_{b+a} (Y . \delta y + Z . \delta z + \text{etc. etc.}) . \partial x \\ &\quad + P_b . (\delta y)_b - P_a . (\delta y)_a + Q_b . (\partial \delta y)_b - Q_a . (\partial \delta y)_a + \ldots \\ &\quad + P'_b . (\delta z)_b - P'_a . (\delta z)_a + Q'_b . (\partial \delta z)_b - Q'_a . (\partial \delta z)_a + \ldots \\ &\quad + \text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

bringen. Setzt man also nach (§. 6.) für das Maximum oder Minimum $(\delta U)_b = 0$, so wird die Gleichung dann nach (§. 84.) ohne weiters behandelt werden können, oder nach einem der frühern oder der (dem angeführten) folgenden Paragraphen, je nachdem x und dessen Ableitungen gar nicht in $\varphi = 0$ vorkommen, oder außer z auch noch u, v, etc. mit ihren Ableitungen; oder je nachdem dabei zwischen y, z, u, v, etc. und ihren Ableitungen als Funktionen von x noch Gleichungen

$\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, etc. etc. gegeben sind oder nicht, oder Grenzbedingungen (in Gleichungen ausgedrückt oder ohne Gleichungen) zu berücksichtigen sind oder nicht.

Anmerkung. Daß, wenn U durch eine solche Differentialgleichung $\varphi = 0$ gegeben ist, dann im Allgemeinen nicht die Rede seyn kann von dem Integral U zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommen, fällt in die Augen; einmal schon, weil dieses immer nur von einem einfachen Integral gesagt werden kann, also der Analogie nach nur höchstens auf den Fall anwendbar wäre, in welchem U bloß durch eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung gegeben ist; zweitens aber hauptsächlich deshalb, weil von einem zwischen den Grenzen $x = a$, $x = b$, genommenen Integral nach jedem Lehrbegriff der Integralrechnung nur dann die Rede ist, wenn aus $U_b - U_a$ die willkührliche Constante wegfällt. Dies letztere ist aber nur

dann der Fall, wenn U die Form $\int\psi(x)\cdot\partial x+C$ hat, also wenn die gegebene Differential-Gleichung die entwickelte Form

$\partial U=\psi(x)$ hat. — So wie aber die Differential-Gleichung $\varphi=0$ eine andere Form hat, wird U_b-U_a immer noch die willkührliche Constante enthalten können (oder die willkührlichen Constanten, wenn $\varphi=0$ nach U von einer höhern als der ersten Ordnung ist), und U_b-U_a ist dann noch nicht bestimmt, sondern immer noch von der (den) willkührlichen Constante(n) abhängig. (Vergl. Analyt. Darstellung der Variations-Rechnung. Berlin 1823. p. 61.).

§. 106. Zusatz.

Es könnte auch eine Integral-Funktion U zweier Veränderlichen x und x_1 gegeben seyn durch eine Gleichung von dieser Form

$$\varphi(x, x_1, y, y_1^0, y_0^1, \dots z, z_1^0, z_0^1, \dots U, U_1^0, U_0^1 \dots)=0$$

und die Funktionen y, z etc. von x, x_1 zu finden, welche $U_{x'',b}$ (unter x'' ein Werth von x_1 und unter b ein Werth von x verstanden) zu einem Maximum oder Minimum machen, in Bezug auf alle nächstangrenzenden Werthe $y_{,,}$, $z_{,,}$ etc. von y, z, etc., und unter der Voraussetzung, daß noch so viele Bedingungen gegeben sind, um U aus $\varphi=0$ als eine völlig bestimmte, keine willkührliche Constante mehr enthaltende Funktion von x_1 und x ansehen zu können.

Weil aber auch für diese, so wie für jede analoge noch mehr zusammengesetzte Aufgabe, in dem Vorhergehenden der Weg hinlänglich gebahnt zu seyn scheint, so dürfte es zweckmäßiger erscheinen, wenn in einer Beispielsammlung einzelne besondere Aufgaben der Art auf diesem Wege gelößt werden, als wenn wir die abstrakte Theorie hier noch weiter verfolgen wollten.

Anmerkung. Auch solche Aufgaben, wo die Funktionen, welche ein Maximum oder Minimum werden sollen, endliche Differenzen-, oder endliche Summen-Ausdrücke sind, müssen hier übergangen werden, weil die Lehre der endlichen Differenzen und der endlichen Integrale (Summen) noch gar zu sehr einer nähern Untersuchung bedarf, bevor wir auf die vor-

handenen Sätze mit Sicherheit gründen können. Es ist mir vielleicht mit der Zeit vergönnt, einige Arbeiten über diese letztere Lehre mitzutheilen, und dann können an diesen Versuch sich sogleich dahin gehörige Aufgaben des Maximums und Minimums anschließen, welche nicht zu den uninterressantern gehören dürften.

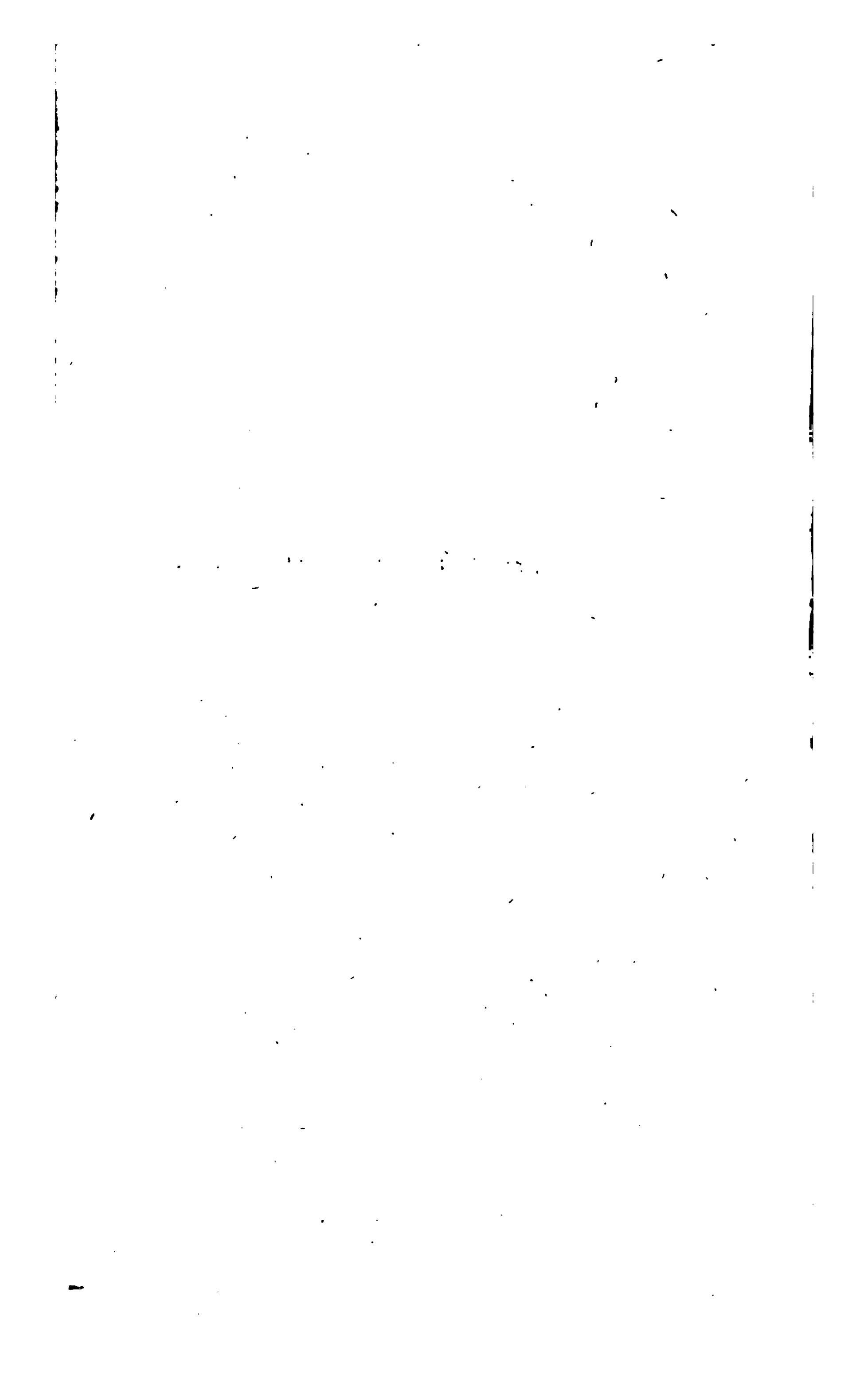
Schluß-Anmerkung.

So oft aber eine Aufgabe des Maximums und Minimums in keinem der hier behandelten speciellen Fälle der allgemeinsten Aufgabe enthalten seyn sollte, so oft müßte man zu den (§. §. 6. und 7.) selbst zurückgehen und die Aufgabe direkt nach diesen (§. §.) behandeln.

A n h a n g,

welcher

eine etwas allgemeinere Variations-Rechnung enthält.



Anhang,

welcher eine etwas allgemeinere Variations-Rechnung enthält.

§. 1. Allgemeine Aufgabe 1.

Es ist gegeben

$V = f(x, x_1, x_2 \ldots y, y_1, y_2, \ldots z, z_1, z_2 \ldots u, u_1, u_2 \ldots \text{etc. etc.})$

wo alle vorkommenden Ausdrücke

x, x_1 etc. y, etc. z, z_1, z_2 etc. u, etc.

ganz beliebig sind (von einander unabhängig, oder zum Theil absolut Veränderliche, zum Theil relativ Veränderliche, und im letztern Falle mögen $y_1, y_2 \ldots$ Ableitungen von y, eben so z_1, z_2, etc. Ableitungen von z etc. vorstellen oder nicht, und wenn sie Ableitungen vorstellen, so mögen solche nach einem oder nach mehren absolut Veränderlichen genommen seyn). Es wird nun angenommen, daß

x in $x_\varkappa$ d. h. in $x + \varkappa . \delta x + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta x^2 + \ldots = x + \varkappa . \Delta x$

x_1 in $(x_1)_\varkappa$ d. h. in $x_1 + \varkappa . \delta x_1 + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta x_1^2 + \ldots = x_1 + \varkappa . \Delta x_1$

u. s. w., eben so

y in $y_\varkappa$ d. h. in $y + \varkappa . \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta^2 y + \ldots = y + \varkappa . \Delta y$

y_1 in $(y_1)_\varkappa$ d. h. in $y_1 + \varkappa . \delta y_1 + \frac{\varkappa^2}{2!} . \delta y_1^2 + \ldots = y_1 + \varkappa . \Delta y_1$

u. s. w., eben so

z in $z_\varkappa$ d. h. in $z + \varkappa . \Delta z$, z_1 in $(z_1)_\varkappa$ d. h. in $z_1 + \varkappa . \Delta z_1$ u. s. w., u in $u_\varkappa$ d. h. in $u + \varkappa . \Delta u$, u. s. w. u. s. w.

(wo Δx, Δx_1, etc., Δy, Δy_1, etc., Δz, Δz_1 etc. Δu, Δu_1 etc. eine hinlänglich in die Augen fallende Bedeutung haben) übergehe, und das was dadurch aus V wird, durch $V_\varkappa$ oder

$$V + \varkappa.\partial V + \frac{\varkappa^2}{2!}.\partial^2 V + \frac{\varkappa^3}{3!}.\partial^3 V + \dots + \frac{\varkappa^n}{n!}.\partial^n V + \dots$$

bezeichnet. Man soll nun $\partial^n V$, d. h. den Coefficienten von $\frac{\varkappa^n}{n!}$ in der Entwicklung von $V_\varkappa$ entwickelt darstellen.

Auflösung. Man hat

$$V_\varkappa = f(x+\varkappa.\Delta x,\ x_1+\varkappa.\Delta x_1,\ \dots\ y+\varkappa.\Delta y,\ y_1+\varkappa.\Delta y_1,\ \dots\ z+\varkappa.\Delta z,\ z_1+\varkappa.\Delta z_1,\ \dots\ u+\varkappa.\Delta u,\ \dots)$$

und dieses nach dem Taylorschen Lehrsatz für mehre Unbekannten (E. §. 40.) entwickelt, giebt wiederum:

$$1)\ V_\varkappa = S.\left\{\frac{\partial^{a+a'+a''+\dots+b+b'+b''+\dots+c+c'+c''+\dots}V}{\partial x^a.\partial x_1^{a'}.\partial x_2^{a''}\dots\partial y^b.\partial y_1^{b'}.\partial y_2^{b''}\dots\partial z^c.\partial z_1^{c'}.\partial z_2^{c''}\dots} \times \atop \times\frac{(\varkappa.\Delta x)^a(\varkappa.\Delta x_1)^{a'}(\varkappa.\Delta x_2)^{a''}\dots(\varkappa.\Delta y)^b(\varkappa.\Delta y_1)^{b'}(\varkappa.\Delta y_2)^{b''}\dots(\varkappa.\Delta z)^c(\varkappa.\Delta z_1)^{c'}(\varkappa.\Delta z_2)^{c''}\dots}{a!\ \ (a')!\ \ (a'')!\ \dots\ b!\ \ (b')!\ \ (b'')!\ \dots\ c!\ \ (c')!\ \ (c'')!\ \dots}\right\}.$$

Nun ist aber nach (E. §. 32.), wenn für $\varkappa.\Delta x$ sein Werth $\varkappa.\partial x + \frac{\varkappa^2}{2!}.\partial^2 x +$ etc. etc. gesetzt wird:

$$\frac{(\varkappa.\Delta x)^a}{a!} = S.\left\{\frac{(\partial x)^{a_1}.\left(\frac{\partial^2 x}{2!}\right)^{a_2}.\left(\frac{\partial^3 x}{3!}\right)^{a_3}\dots}{(a_1)!\ (a_2)!\ \ (a_3)!\ \dots}\varkappa^{a_1+2a_2+3a_3+\dots}\right\}_{a_1+a_2+a_3+\dots=a}$$

und hieraus ist durch bloße Verwechslung der Buchstaben sehr leicht und unmittelbar auch

$$\frac{(\varkappa.\Delta x_1)^{\mathfrak{a}'}}{(\mathfrak{a}')!},\ \frac{(\varkappa.\Delta x_2)^{\mathfrak{a}''}}{(\mathfrak{a}'')!},\ \text{etc.},\ \frac{(\varkappa.\Delta y)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!},\ \frac{(\varkappa.\Delta y_1)^{\mathfrak{b}'}}{(\mathfrak{b}')!},\ \text{etc. etc.},\ \frac{(\varkappa.\Delta z)^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!},\ \frac{(\varkappa.\Delta z_1)^{\mathfrak{c}'}}{(\mathfrak{c}')!},\ \text{etc. etc.}$$

etc. etc. etc. entwickelt herzustellen. — Substituirt man aber diese Werthe in die Gleichung (1.), vereinigt man dabei alle Potenzen von $\varkappa$, die als Faktoren erscheinen (dadurch daß man ihre Exponenten addirt) in eine einzige Potenz von $\varkappa$, setzt man den Exponenten dieser Potenz $=\mathfrak{n}$, also

$$3)\ \left.\begin{cases} \mathfrak{a}_1+2\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{a}_3+\ldots+\mathfrak{a}_1'+2\mathfrak{a}_2'+3\mathfrak{a}_3'+\ldots+\mathfrak{a}_1''+2\mathfrak{a}_2''+3\mathfrak{a}_3''+\ldots+\ \text{etc. etc.} \\ +\mathfrak{b}_1+2\mathfrak{b}_2+3\mathfrak{b}_3+\ldots+\mathfrak{b}_1'+2\mathfrak{b}_2'+3\mathfrak{b}_3'+\ldots+\mathfrak{b}_1''+2\mathfrak{b}_2''+3\mathfrak{b}_3''+\ldots+\ \text{etc. etc.} \\ +\mathfrak{c}_1+2\mathfrak{c}_2+3\mathfrak{c}_3+\ldots+\mathfrak{c}_1'+2\mathfrak{c}_2'+3\mathfrak{c}_3'+\ldots+\mathfrak{c}_1''+2\mathfrak{c}_2''+3\mathfrak{c}_3''+\ldots+\ \text{etc. etc.} \\ +\ \text{etc. etc. etc.}\ \ldots \end{cases}\right\} = \mathfrak{n},$$

wo in jeder Reihe $\mathfrak{n}\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{n}\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}'$, $\mathfrak{n}\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}''$, $\mathfrak{n}\mathfrak{b}_{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{n}\mathfrak{b}_{\mathfrak{n}}'$, $\mathfrak{n}\mathfrak{b}_{\mathfrak{n}}''$, $\mathfrak{n}\mathfrak{c}_{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{n}\mathfrak{c}_{\mathfrak{n}}'$, etc. beziehlich die letzten Glieder sind, weil kein deutscher Buchstabe (E. §. 30.) einen negativen Werth bekommen darf (Vergl. Note zu §. 32.); — nimmt man dann unter der Voraussetzung dieser Bedingungsgleichung, den Coefficienten dieser Potenz $\varkappa^{\mathfrak{n}}$, und multiplicirt selbigen mit $\mathfrak{n}!$, um den von $\frac{\varkappa^{\mathfrak{n}}}{\mathfrak{n}!}$ d. h. $\partial^{\mathfrak{n}}V$ zu erhalten, so wird sich ergeben:

$$\text{I.}\quad \partial^n V = n!\, S.\left\{ \frac{\partial^{a+a'+a''+\ldots+b+b'+b''+\ldots+c+c'+c''+\ldots} V}{\partial x^a . \partial x_1^{a'} . \partial x_2^{a''} \ldots \partial y^b . \partial y_1^{b'} . \partial y_2^{b''} \ldots \partial z^c . \partial z_1^{c'} . \partial z_2^{c''} \ldots} \times \frac{(\partial x)^{a_1} . (\partial x_1)^{a_1'} . (\partial x_2)^{a_1''} \ldots (\partial y)^{b_1} . (\partial y_1)^{b_1'} . (\partial y_2)^{b_1''} \ldots (\partial z)^{c_1} . (\partial z_1)^{c_1'} \ldots}{(a_1)!\,(a_1')!\,(a_1'')!\ldots(b_1)!\,(b_1')!\,(b_1'')!\ldots(c_1)!\,(c_1')!\ldots} \times \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{2!}\right)^{a_2}\left(\frac{\partial^2 x_1}{2!}\right)^{a_2'}\left(\frac{\partial^2 x_2}{2!}\right)^{a_2''}\ldots\left(\frac{\partial^2 y}{2!}\right)^{b_2}\left(\frac{\partial^2 y_1}{2!}\right)^{b_2'}\ldots\left(\frac{\partial^2 z}{2!}\right)^{c_2}\left(\frac{\partial^2 z_1}{2!}\right)^{c_2'}\ldots}{(a_2)!\,(a_2')!\,(a_2'')!\ldots(b_2)!\,(b_2')!\ldots(c_2)!\,(c_2')!\ldots} \times \frac{\left(\frac{\partial^3 x}{3!}\right)^{a_3}\ldots}{(a_3)!\ldots} \right\}$$

Mit den Bedingungs-Gleichungen 4)

$$\left\{\begin{array}{lll} a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=a, & a_1'+a_2'+a_3'+\ldots+a_n'=a', & a_1''+a_2''+a_3''+\ldots+a_n''=a'',\ldots \\ b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=b, & b_1'+b_2'+b_3'+\ldots+b_n'=b', & b_1''+b_2''+b_3''+\ldots+b_n''=b'',\ldots \\ c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=c, & c_1'+c_2'+c_3'+\ldots+c_n'=c', & c_1''+c_2''+c_3''+\ldots+c_n''=c'',\ldots \\ d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n=d, & \text{etc. etc. etc. etc. etc. etc.} & \end{array}\right\}$$

Für eine jede besondere Aufgabe, wo die Zahl der $x, x_1, x_2 \ldots y, y_1, y_2, \ldots z$, etc. u, etc. völlig bestimmt ist, wo auch für n eine bestimmte Zahl angenommen wird, hat man also nur alle die Werthe zu suchen, die Null und ganze positive Zahlen sind, und die den Gleichungen (4.) so wie der Gleichung (3.) genügen, und diese Systeme der Werthe statt der unbestimmten

$$a_1, a_2, a_3 \ldots a, \quad a_1', a_2', a_3' \ldots a', \quad b_1, b_2, b_3 \ldots b, \text{ etc. etc. etc. etc.}$$

eines nach dem andern in (I.) zu substituiren und so aus dem allgemeinen Summen-Ausdruck in (I.) die einzelnen Glieder hervorgehen zu sehen, welche zusammen addirt, und, wie angezeigt, mit $n!$ multiplicirt, das gesuchte $\partial^n V$ geben.

Anmerkung. Viel einfacher würde sich diese Auflösung gestalten, wenn man

$$\Delta x = \partial x,\ \Delta x_1 = \partial x_1 \text{ etc.},\ \Delta y = \partial y,\ \Delta y_1 = \partial y_1 \text{ etc.},\ \Delta z = \partial z, \text{ etc. etc.}$$

annehmen kann oder will. Alle mit den Zeigern 2, 3, 4, ... afficirte deutsche Buchstaben in der Formel (I.) würden dann keinen andern Werth haben können als Null, und die mit dem Zeiger 1 afficirten deutschen Buchstaben würden deshalb vermöge der Gleichungen (4.) den unten gar nicht afficirten gleich seyn, und die Bedingungsgleichung (3.) würde sich bloß auf

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'+\mathfrak{a}''+\ldots+\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{b}''+\ldots+\mathfrak{c}+\mathfrak{c}'+\mathfrak{c}''+\ldots+\mathfrak{d}+\ldots=n$$

reduciren, und die Formel (I.) würde übergehen in

$$\text{II.}\quad \partial^n V = n!\,S.\left\{\frac{\partial^{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'+\mathfrak{a}''+\ldots+\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{b}''+\ldots+\mathfrak{c}+\mathfrak{c}'+\mathfrak{c}''+\ldots}V}{\partial x^{\mathfrak{a}}.\partial x_1^{\mathfrak{a}'}.\partial x_2^{\mathfrak{a}''}\ldots\partial y^{\mathfrak{b}}.\partial y_1^{\mathfrak{b}'}.\partial y_2^{\mathfrak{b}''}\ldots\partial z^{\mathfrak{c}}.\partial z_1^{\mathfrak{c}'}.\partial z_2^{\mathfrak{c}''}\ldots}\times \times\frac{(\partial x)^{\mathfrak{a}}.(\partial x_1)^{\mathfrak{a}'}.(\partial x_2)^{\mathfrak{a}''}\ldots(\partial y)^{\mathfrak{b}}.(\partial y_1)^{\mathfrak{b}'}.(\partial y_2)^{\mathfrak{b}''}\ldots(\partial z)^{\mathfrak{c}}.(\partial z_1)^{\mathfrak{c}'}.(\partial z_2)^{\mathfrak{c}''}\ldots}{\mathfrak{a}!\,(\mathfrak{a}')!\,(\mathfrak{a}'')!\ldots\mathfrak{b}!\,(\mathfrak{b}')!\,(\mathfrak{b}'')!\ldots\mathfrak{c}!\,(\mathfrak{c}')!\,(\mathfrak{c}'')!\ldots}\right\}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'+\mathfrak{a}''+\ldots+\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'+\mathfrak{b}''+\ldots+\mathfrak{c}+\mathfrak{c}'+\mathfrak{c}''\ldots+\ldots=n}$$

Diese Gleichung (II.) würde sich aber noch einfacher unmittelbar (nicht aus I. sondern) aus der Formel (1.) (welche keine andere ist, als der Taylorsche Lehrsatz für mehre Veränderliche erweitert) ergeben, wenn man daselbst durchgehends ∂ statt Δ substituiren, die Potenzen von $\varkappa$ als Faktoren alle heraussetzen und in eine einzige Potenz von $\varkappa$ vereinigen, den Exponenten dieser letztern $=n$ setzen (wodurch die in (II.) stehende Bedingungsgleichung erhalten wird), dann den Coefficienten von $\varkappa^n$ nehmen und solchen noch mit $n!$ multipliciren wollte, um den von $\frac{\varkappa^n}{n!}$ zu haben.

§. 2. Zusatz.

Sind y_1, y_2, y_3, etc. etc. Ableitungen nach x, oder nach x_1 oder etc., oder nach mehreren dieser letztern, so muß man noch den Satz (§. 6.) anwenden, nach welchem,

$$\text{wenn} \quad y_p = \frac{\partial^p y}{\partial x^p}, \quad \text{dann} \quad \delta . y_p = \frac{\partial^p \delta y}{\partial x^p}, \quad \text{und}$$

$$\text{wenn} \quad y_{p+q} = \frac{\partial^{p+q} y}{\partial x^p . \partial x_1{}^q}, \quad \text{dann} \quad \delta . y_{p+q} = \frac{\partial^{p+q} \delta y}{\partial x^p . \partial x_1{}^q}$$

u. s. w. f. seyn würde, so daß letztere Ausdrücke statt ersterer gesetzt werden könnten oder müßten.

Anmerkung. Leiten wir nun aus der allgemeinen Aufgabe (§. 1.) einige besondere Fälle ab:

§. 3. Zusatz.

Sey bloß $V = f(x, y)$ und $V_\varkappa = f(x, y_\varkappa) = f(x, y + \varkappa . \Delta x)$, so ist, da x hier gar nicht verändert werden soll, hier nur das von y abhängige zu berücksichtigen, alles übrige $= 0$ zu setzen; und dann erhält man aus der Formel (§. 1.)

$$1) \quad \delta^n V = n! S. \left\{ \frac{\partial^b V}{b!} . \frac{(\delta y)^{b_1} . \left(\frac{\delta^2 y}{2!}\right)^{b_2} . \left(\frac{\delta^3 y}{3!}\right)^{b_3} \dots \left(\frac{\delta^n y}{n!}\right)^{b_n}}{(b_1)! \quad (b_2)! \quad (b_3)! \quad \dots (b_n)!} \right\}_{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n=b,\; b_1+2b_2+3b_3+\dots+nb_n=n};$$

und nimmt man bloß $y_\varkappa = y + \varkappa . \delta y$, setzt also $\delta^2 y = 0 = \delta^3 y = \text{etc.}$, so geht aus (1.) hervor (oder aus II. Anmerk. §. 1.):

$$2) \quad \delta^n V = \frac{\partial^n V}{\partial y^n} . (\delta y)^n.$$

§. 4. Zusatz.

Sey $V = f(x, y, y_1)$ und $V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, (y_1)_\varkappa)$, so ist, da x hier gar nicht verändert werden soll, in unsrer allgemeinen Formel (I. §. 1.) nur das von y und y_1 abhängige beizubehalten, und man erhält:

$$1)\quad \delta^n V = n!\, S. \left\{ \frac{\partial^{b+b'} V}{\partial y^b \cdot \partial y_1^{\,b'}} \cdot \frac{(\delta y)^{b_1} . (\delta y_1)^{b_1'} . \left(\frac{\delta^2 y}{2!}\right)^{b_2} . \left(\frac{\delta^2 y_1}{2!}\right)^{b_2'} \cdots \left(\frac{\delta^n y}{n!}\right)^{b_n} . \left(\frac{\delta^n y_1}{n!}\right)^{b_n'}}{(b_1)!\;(b_1')!\;(b_2)!\;(b_2')!\;\cdots\;(b_n)!\;(b_n')!} \right\}_{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=b,\; b_1'+b_2'+b_3'+\ldots+b_n'=b',\; b_1+b_1'+2(b_2+b_2')+3(b_3+b_3')+\ldots+n(b_n+b_n')=n}$$

und nimmt man bloß $y_\varkappa = y + \varkappa . \delta y$, $(y_1)_\varkappa = y_1 + \varkappa . \delta y_1$, so daß $\delta^2 y = \delta^3 y = \text{etc.} = \delta^2 y_1 = \delta^3 y_1 = \text{etc.} = 0$ werden, so folgt aus (1.) (oder aus II. Anmerk. §. 1.):

$$2)\quad \delta^n V = n!\, S. \left[\frac{\partial^{b+b'} V}{\partial y^b \cdot \partial y_1^{\,b'}} \cdot \frac{(\delta y)^b . (\delta y_1)^{b'}}{(b)!\;(b')!} \right]_{b+b'=n}.$$

§. 5. Zusatz.

Sey $V = f(x, y, y_1, z, z_1, z_2)$ und $V_\varkappa = f(x, y_\varkappa, (y_1)_\varkappa, z_\varkappa, (z_1)_\varkappa, (z_2)_\varkappa)$; und man erhält aus (I. §. 1.):

$$1)\quad \delta^n V = n!\,S.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^{b+b'+c+c'+c''}V}{\partial y^{b}.\partial y_1^{\,b'}.\partial z^{c}.\partial z_1^{\,c'}.\partial z_2^{\,c''}}\times \\ \times\dfrac{(\delta y)^{a_1}.(\delta y_1)^{b_1'}.(\delta z)^{c_1}.(\delta z_1)^{c_1'}.(\delta z_2)^{c_1''}}{(b_1)!\;(b_1')!\;(c_1)!\;(c_1')!\;(c_1'')!}\cdot\dfrac{\left(\frac{\delta^2 y}{2!}\right)^{b_2}\cdot\left(\frac{\delta^2 y_1}{2!}\right)^{b_2'}\cdot\left(\frac{\delta^2 z}{2!}\right)^{c_2}\cdot\left(\frac{\delta^2 z_1}{2!}\right)^{c_2'}\cdot\left(\frac{\delta^2 z_2}{2!}\right)^{c_2''}}{(b_2)!\;(b_2')!\;(c_2)!\;(c_2')!\;(c_2'')!}\times \\ \times\ldots\times\dfrac{\left(\frac{\delta^n y}{n!}\right)^{b_n}\cdot\left(\frac{\delta^n y_1}{n!}\right)^{b_n'}\ldots\left(\frac{\delta^n z_2}{n!}\right)^{c_n''}}{(b_n)!\;(b_n')!\;\ldots\;(c_n'')!}\end{array}\right\}$$

$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=b$, $b_1'+b_2'+b_3'+\ldots+b_n'=b'$, $c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=c$, $c_1'+c_2'+c_3'+\ldots+c_n'=c'$, $c_1''+c_2''+c_3''+\ldots+c_n''=c''$, und $b_1+b_1'+c_1+c_1'+c_1''+2(b_2+b_2'+c_2+c_2'+c_2'')+\ldots+n(b_n+b_n'+c_n+c_n'+c_n'')=n$;

und für $y_\varkappa=y+\varkappa.\delta y$, $(y_1)_\varkappa=y+\varkappa.\delta y_1$ etc. etc. d. h. für $\delta^2 y=0=\delta^2 y_1=\delta^2 z=\delta^2 z_1=\delta^2 z_2=\delta^3 y=$ etc. etc. $=\delta^n y=\delta^n y_1=\delta^n z=\delta^n z_1=\delta^n z_2=0=$ etc. aus (1.) oder (aus II. §. 1. Anmerk.):

$$2)\qquad \delta^n V = n!\,S.\left[\frac{\partial^{b+b'+c+c'+c''}V}{\partial y^{b}.\partial y_1^{\,b'}.\partial z^{c}.\partial z_1^{\,c'}.\partial z_2^{\,c''}}\cdot\frac{(\delta y)^{b}.(\delta y_1)^{b'}.(\delta z)^{c}.(\delta z_1)^{c'}.(\delta z_2)^{c''}}{b!\;(b')!\;c!\;(c')!\;(c'')!}\right]_{b+b'+c+c'+c''=n.}$$

Anmerkung 1. Jeden dieser in den (§. §. 3 — 5.) betrachteten besondern Fälle kann man auch nach (§. 1.) direkt behandeln, wie daselbst die ganz allgemeine Aufgabe behandelt worden ist, und jedesmal erhält man unmittelbar aus dem Taylor'schen Lehrsatze (E. §. 40.) den verlangten Coefficienten $\delta^n V$, wenn die Variation von y, etc. bloß $y+\varkappa.\delta y$ also $\Delta y=\delta y$, etc. genommen wird; aus demselben Lehrsatze dagegen, aber nicht so unmittelbar, sondern indem man noch (E. §. 32.) zu Hilfe nimmt, sobald die Variationen $y_\varkappa=y+\varkappa.\delta y+\frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 y+\frac{\varkappa^3}{3!}.\delta^3 y+$ etc., etc. etc., etc. etc., genommen werden.

Sey, um noch ein Beispiel dieser **direkten** Entwicklung zu geben, $V = f(x, y, z, u)$ und $V_x = f(x, y_x, z_x, u_x)$, also $V_x = f(x, y+x.\Delta y, z+x.\Delta z, u+x.\Delta u)$, also nach (E. §. 40.)

$$(\sigma) \ldots V_x = S.\left[\frac{\partial^{a+b+c}V}{\partial y^a . \partial z^b . \partial u^c} . \frac{(x.\Delta y)^a}{a!} . \frac{(x.\Delta z)^b}{b!} . \frac{(x.\Delta u)^c}{c!}\right]$$

oder wenn man aus (E. §. 32.) statt $\frac{(x.\Delta y)^a}{a!}$, $\frac{(x.\Delta z)^b}{b!}$, $\frac{(x.\Delta u)^c}{c!}$ die dort zu findenden Entwicklungen setzt, die Potenzen von x als Faktoren herausstellt, in eine Potenz von x vereinigt, den Exponenten der letztern $= n$ setzt, und dann den Coefficienten von x^n mit $n!$ multiplicirt:

$$1) \quad \delta^n V = n!\, S.\left\{\frac{\partial^{a+b+c}V}{\partial x^a . \partial y^b . \partial z^c} . \frac{(\delta y)^{a_1} . (\delta z)^{b_1} . (\delta u)^{c_1} . \left(\frac{\delta^2 y}{2!}\right)^{a_2} . \left(\frac{\delta^2 z}{2!}\right)^{b_2} . \left(\frac{\delta^2 u}{2!}\right)^{c_2} \ldots \left(\frac{\delta^n y}{n!}\right)^{a_n} . \left(\frac{\delta^n z}{n!}\right)^{b_n} . \left(\frac{\delta^n u}{n!}\right)^{c_n}}{(a_1)!\,(b_1)!\,(c_1)!\,(a_2)!\,(b_2)!\,(c_2)! \ldots (a_n)!\,(b_n)!\,(c_n)!}\right\}_{a_1+a_2+\ldots+a_n=a,\, b_1+b_2+\ldots+b_n=b,\, c_1+c_2+\ldots+c_n=c,\, a_1+b_1+c_1+2(a_2+b_2+c_2)+\ldots+n(a_n+b_n+c_n)=n}$$

dagegen, wenn man bloß $\delta y = \Delta y$, $\delta z = \Delta z$, $\delta u = \Delta u$ nimmt, entweder aus (1.) oder noch besser unmittelbar aus (σ), indem man daselbst die Faktoren x^a, x^b, x^c herausstellt, in die einzige Potenz x^{a+b+c} oder x^n verwandelt, $a+b+c=n$ setzend,

$$2) \quad \delta^n V = S.\left[\frac{\partial^{a+b+c}V}{\partial y^a . \partial z^b . \partial u^c} . \frac{(\delta y)^a . (\delta z)^b . (\delta z)}{a!\quad b!\quad c!}\right]_{a+b+c=n}.$$

Anmerkung 2. Einige dieser allgemeinen Entwicklungen, aber nur für sehr specielle Fälle, findet man auch schon in der „Analyt. Darstellung d. Variations-Rechnung." Berlin 1823 im ersten Kapitel. — Vergleicht man sowohl den dortigen Gang mit dem hiesigen, als auch z. B. das dortige Resultat p. 16. mit dem hier für denselben Fall in der vorstehenden (n. 2. der Anmerk. 1.) hingestellten, so wird man die ungemeine Einfachheit und Fruchtbarkeit des hier angewandten Aggregaten-Kalkuls (des Professors H. A. Rothe) mit Vergnügen bemerken müssen.

Anmerkung 3. Aus (§. 3. n. 1.) erhält man für $n=1$ und $n=2$ die Formeln (V. §. 7.); aus (§. 4. n. 1.) dagegen die des (V. §. 8.), z statt y_1 setzend. — Und aus der allgemeinen Formel (I. §. 1.) überhaupt, für $n=1$ und $n=2$, die Formeln der (V. §. §. 7 — 10.), was wir hier deshalb noch besonders bemerken, weil dort öfters die zweiten Variations-Coefficienten $\partial^2 V$, nicht entwickelt hingeschrieben worden sind, solche Entwicklungen also hieraus für $n=2$ entnommen werden können.

§. 6. Allgemeine Aufgabe 2.

Es ist wiederum wie im (§. 1.) $V=f(x, x_1, x_2, \ldots y, y_1, y_2, \ldots z, z_1, z_2, \ldots)$ wo aber $y, y_1, y_2, \ldots z, z_1, z_2, \ldots$ etc. ausdrücklich als Funktionen der absolut Veränderlichen x, x_1, x_2, etc. gedacht sind. Man denkt sich nun zuerst $y, y_1, y_2, \ldots z, z_1, z_2 \ldots$ in $y_\varkappa, (y_1)_\varkappa, (y_2)_\varkappa \ldots z_\varkappa, (z_1)_\varkappa, (z_2)_\varkappa \ldots$ übergehend; und was dadurch aus V wird, durch $V_\varkappa$, so wie die einzelnen Coefficienten dieser Variationen durch ∂_1 angedeutet, so daß man hat

$$(\odot). \qquad V_\varkappa = S.\left[\partial_1{}^{r}V.\frac{\varkappa^{r}}{r!}\right].$$

Nachgehends denke man sich noch alles $x, x_1, x_2, \ldots$ in $x_\varkappa, (x_1)_\varkappa, (x_2)_\varkappa \ldots$ übergehend, was dadurch aus $V_\varkappa$ wird, durch $V_{(\varkappa)}$ so wie die Coefficienten dieser Variationen durch ∂ angedeutet. Man soll nun $\partial^n V$ in ∂_1 ausdrücken.

Auflösung. Man hat die Formel $(\odot)$. d. h.

$$1) \; V_\varkappa = S.\left[\partial_1{}^{r}V.\frac{\varkappa^{r}}{r!}\right].$$

Setzt man nun hier in $\partial_1{}^{r}V$ durchgehends $x+\varkappa.\Delta x$, $x_1+\varkappa.\Delta x_1$, $x_2+\varkappa.\Delta x_2$, etc. etc. statt $x, x_1, x_2, \ldots$ so erhält man $V_{(\varkappa)}$, und nach (E. §. 40.):

$$2)\quad V_{(\varkappa)} = S.\left[\frac{\partial^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\dots}(\delta_1{}^{\mathfrak{k}}V)}{\partial x^{\mathfrak{a}}.\partial x_1{}^{\mathfrak{b}}.\partial x_2{}^{\mathfrak{c}}\dots}.\frac{(\varkappa.\Delta x)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}.\frac{(\varkappa.\Delta x_1)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}.\frac{(\varkappa.\Delta x_2)^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\dots.\frac{\varkappa^{\mathfrak{k}}}{\mathfrak{k}!}\right].$$

Nimmt man nun, wie dies hier in der That in den meisten Anwendungen wird geschehen können, δ statt Δ, d. h. nimmt man alle höhern Variations-Coefficienten $\delta^2 x$, $\delta^2 x_1$, etc. etc. etc. der Null gleich, so ergiebt sich aus (2.), wenn man $\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\dots=\mathfrak{n}$ setzt, und den Coefficienten von $\varkappa^{\mathfrak{n}}$ mit $\mathfrak{n}!$ noch multiplicirt:

$$3)\qquad \delta^{\mathfrak{n}}V = \mathfrak{n}!\,S.\left[\frac{\partial^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\dots}(\delta_1{}^{\mathfrak{k}}V)}{\partial x^{\mathfrak{a}}.\partial x_1{}^{\mathfrak{b}}.\partial x_2{}^{\mathfrak{c}}\dots}.\frac{(\delta x)^{\mathfrak{a}}.(\delta x_1)^{\mathfrak{b}}.(\delta x_2)^{\mathfrak{c}}\dots}{\mathfrak{k}!\ \mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!\dots}\right]_{\mathfrak{k}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\dots)=\mathfrak{n}}.$$

Wird dagegen

$$\varkappa.\Delta x = \varkappa.\delta x + \frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 x + \frac{\varkappa^3}{3!}.\delta^3 x + \dots$$

$$\varkappa.\Delta x_1 = \varkappa.\delta x_1 + \frac{\varkappa^2}{2!}.\delta^2 x_1 + \frac{\varkappa^3}{3!}.\delta^3 x_1 + \dots \qquad \text{u. s. w. f.}$$

angenommen, so muß man in (2.) statt $\frac{(\varkappa.\Delta x)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}$, $\frac{(\varkappa.\Delta x_1)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}$, etc. etc. die aus (E. §. 32.) zu findenden Entwickelungen setzen, und erhält dann, auf dieselbe Weise wie (§. 1.) verfahrend:

$$4)\ \delta^n V = n!\,S.\left\{\frac{\partial^{a+b+c+\dots}(\delta_1{}^k V)}{\partial x^a.\partial x_1{}^b.\partial x_2{}^c\dots}\cdot\frac{(\delta x)^{a_1}.(\delta x_1)^{b_1}.(\delta x_2)^{c_1}\dots\left(\frac{\delta^2 x}{2!}\right)^{a_2}\cdot\left(\frac{\delta^2 x_1}{2!}\right)^{b_2}\cdot\left(\frac{\delta^2 x_2}{2!}\right)^{c_2}\dots}{(a_1)!\,(b_1)!\,(c_1)!\dots(a_2)!\,(b_2)!\,(c_2)!\dots}\times\dots\times\frac{\left(\frac{\delta^n x}{n!}\right)^{a_n}\cdot\left(\frac{\delta^n x_1}{n!}\right)^{b_n}\cdot\left(\frac{\delta^n x_2}{n!}\right)^{c_n}\dots}{(a_n)!\,(b_n)!\,(c_n)!\dots}\right\}$$

$a_1+a_2+\dots+a_n=a$; $b_1+b_2+\dots+b_n=b$; $c_1+c_2+\dots+c_n=c$; u. s. w. und
$k+(a_1+b_1+c_1+\dots)+2(a_2+b_2+c_2+\dots)+3(a_3+b_3+c_3+\dots)+\dots+n(a_n+b_n+c_n+\dots)=n.$

§. 7. Zusatz.

Nimmt man in (§. 6.) nur x allein in V an, und sind x_1, x_2, etc. in V nicht enthalten, so erhält man, im Falle bloß $x+\varkappa.\delta x$ statt x gesetzt werden sollte

$$1)\qquad \delta^n V = n!\,S.\left[\frac{\partial^a.(\delta_1{}^k V)}{\partial x^a}\cdot\frac{(\delta x)^a}{k!\,a!}\right]_{k+a=n},$$

und im Falle $\delta^2 x$, $\delta^3 x$, etc. nicht Null sind:

$$2)\ \delta^n V = n!\,S.\left\{\frac{\partial^a.\delta_1{}^k V}{\partial x^a}\cdot\frac{(\delta x)^{a_1}.\left(\frac{\delta^2 x}{2!}\right)^{a_2}\cdot\left(\frac{\delta^3 x}{3!}\right)^{a_3}\dots\left(\frac{\delta^n x}{n!}\right)^{a_n}}{k!\,(a_1)!\,(a_2)!\,(a_3)!\dots(a_n)!}\right\}$$
$$a_1+a_2+\dots+a_n=a$$
$$k+a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n=n.$$

§. 8. Zusatz.

Kommen aber in V (§. 6.) nur die beiden absolut Veränderlichen x und x_1 vor, und nicht x_2 etc. etc., so erhält man, wenn alle höhern Variations-Coefficienten von x, x_1 außer dem ersten $=0$ gedacht sind:

$$1)\qquad \delta^n V = n!\, S. \left[\frac{\partial^{a+b}(\delta_1{}^{k} V)}{\partial x^a . \partial x_1{}^b} . \frac{(\delta x)^a . (\delta x_1)^b}{k!\; a!\; b!}\right]_{k+a+b=n}$$

und in dem andern Falle, wo die höhern Variations-Coefficienten von x, x_1, nicht Null angenommen sind:

$$2)\quad \delta^n V = n!\, S. \left\{\frac{\partial^{a+b}(\delta_1{}^{k} V)}{\partial x^a . \partial x_1{}^b} . \frac{(\delta x)^{a_1} . (\delta x_1)^{b_1} . \left(\frac{\delta^2 x}{2!}\right)^{a_2} . \left(\frac{\delta^2 x_1}{2!}\right)^{b_2} \ldots \left(\frac{\delta^n x}{n!}\right)^{a_n} . \left(\frac{\delta^n x_1}{n!}\right)^{b_n}}{(a_1)!\; (b_1)!\; (a_2)!\; (b_2)! \ldots (a_n)!\; (b_n)!}\right\}_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_n=a;\; b_1+b_2+\ldots+b_n=b;\\ k+(a_1+b_1)+2(a_2+b_2)+\ldots+n(a_n+b_n)=n.}}$$

Anmerkung 1. Aus (§. 7.) erhalten wir für $n=1$ und $n=2$ die Formeln (B. §. 26.), und aus (§. 8.) für $n=1$ und $n=2$ die Formeln des (B. §. 30.).

Anmerkung 2. Dies gilt, wie auch V gegeben seyn mag, also noch wenn V bloß $=y$, auch wenn $V=\frac{\partial^m y}{\partial x^m}$ und dergl. seyn sollte. In dem letztern Falle würde aber $\delta_1^p V = \delta_1^p . \frac{\partial^m y}{\partial x^m} = \frac{\partial^m . \delta_1^p y}{\partial x^m}$ gesetzt werden können (nach B. §. 6.).

Anmerkung 3. Man kann auch umgekehrt $\delta_1{}^n V$ in δV, $\delta^2 V$, etc. ausdrücken. Namentlich ergiebt sich, in dem Falle des (§. 7. n. 1.) und aus der dortigen Formel: